

# CALCULUL SOLICITĂRILOR DINAMICE ECHIVALENTE ÎN SISTEMELE MECANICE DE TRANSMITERE A MIȘCĂRII CU ARBORI ELASTICI

## THE EQUIVALENT TORQUES CALCULATION FOR THE MECHANIC TRANSMISSION SYSTEMS WITH ELASTIC DRIVESHAFTS

Nicușor DRĂGAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie  
din Brăila, Romania  
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET  
e-mail: ndragan@ugal.ro

**Rezumat:** *Articolul prezintă modelele fizice și matematice ale sistemelor mecanice cu elemente elastice și / sau rigide, supuse unor sarcini dinamice: forțe și momente de cuplu. Scopul studiului este de a stabili câteva formule ușor de utilizat pentru a echivala aceste sarcini dinamice în orice punct al sistemului. Studiul are în vedere atât sistemele mecanice ideale (fără pierderi de energie), cât și sistemele reale în funcție de eficiența lor mecanică.*

**Cuvinte cheie:** *dinamica sistemelor mecanice, forțe și momente de torsiune echivalente*

**Abstract:** *This article presents the physical and mathematical models of mechanical systems with elastical and/or rigid elements, subjected to dynamical loads: forces and torques. The aim of the study is to establish some formulas easy to use to equate these dynamical loads in any point of the system. It had taken into account both the ideal mechanical systems (no energy losses) and the real systems acc. to their mechanical efficiency.*

**Keywords:** *mechanical systems dynamics, equivalent forces and torques*

### 1. INTRODUCERE

Solicitările dinamice la care sunt supuse sistemele mecanice constau în diverse forțe și momente variabile în timp care pot fi produse de:

- motoarele de acționare (în acest caz solicitările produc lucru mecanic motor);
- organele de lucru ale mașinilor și echipamentelor tehnologice (în acest caz solicitările produc lucru mecanic rezistent, util în procesul tehnologic de producție);
- forțele și momentele rezistente de frecare (lucru mecanic rezistent).

Principiul de reducere la sistemele mecanice elastice de acționare a mașinilor și utilajelor tehnologice constă în determinarea unor mărimi caracteristice echivalente ale elementelor structurale constitutive (mase, elemente elastice, disipatoare energetice) precum și ale sistemelor de solicitări dinamice ce acționează în aceste sisteme. Aceste mărimi sunt echivalente dacă au aceeași energie mecanică (cinetică, potențială), dacă disipă aceeași cantitate de energie mecanică, dacă execută același lucru mecanic în același interval de timp.

În această lucrare, pentru determinarea momentelor mecanice echivalente se utilizează principiul echivalării lucrului mecanic produs.

## 2. CALCULUL FORȚELOR ȘI MOMENTELOR ECHIVALENTE

Se consideră un sistem mecanic asupra căruia acționează  $n$  forțe concentrate  $\overline{F}_i$   $i = \overline{1, n}$  și  $m$  cupluri de forțe  $\overline{M}_j$   $j = \overline{1, m}$ . Deplasările elementare ale punctelor de aplicație ale forțelor sunt  $d\overline{s}_i$   $i = \overline{1, n}$  și rotațiile elementare ale cuplurilor de forțe sunt  $d\overline{\varphi}_j$ , unde  $j = \overline{1, m}$ . Lucrul mecanic elementar total al sistemului de forțe și momente de forțe este:

$$dL = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i \cdot d\overline{s}_i + \sum_{j=1}^m \overline{M}_j \cdot d\overline{\varphi}_j \quad (1)$$

Considerând că deplasările punctelor de aplicație a forțelor sunt paralele cu direcțiile forțelor iar rotațiile sunt în plane perpendiculare pe direcțiile cuplurilor de forțe, produsele scalare din (1) sunt egale cu produsele mărimilor scalare. În acest caz, lucrul mecanic elementar total devine:

$$dL = \sum_{i=1}^n F_i \cdot ds_i + \sum_{j=1}^m M_j \cdot d\varphi_j \quad (2)$$

Produsele din sumele (2) sunt pozitive dacă lucrul mecanic este motor și sunt negative dacă lucrul mecanic este rezistent.

Problema echivalării întregului sistem de solicitări aplicate sistemului cu o singură forță echivalente constă în a echivala lucrul mecanic total

$$\overline{F}_{eqv} \cdot d\overline{s} = dL, \quad (3)$$

unde:  $\overline{F}_{eqv}$  este forța unică echivalentă

$d\overline{s}$  - deplasarea elementară a forței echivalente  $\overline{F}_{eqv}$ .

Considerând că deplasarea punctului de aplicație al forței echivalente este paralelă cu suportul forței, relația (2) a lucrului mecanic elementar se poate scrie:

$$F_{eqv} \cdot ds = \sum_{i=1}^n F_i \cdot ds_i + \sum_{j=1}^m M_j \cdot d\varphi_j \quad (4)$$

Dacă relația (4) se divide cu timpul  $dt$  în care are loc mișcarea sistemului, ecuația puterii se poate scrie

$$F_{eqv} \frac{ds}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{ds_i}{dt} + \sum_{j=1}^m M_j \frac{d\varphi_j}{dt}, \quad (5)$$

Calculul solicitărilor dinamice echivalente în sistemele mecanice de transmitere a mișcării cu arbori elastici

sau

$$F_{eqv} \cdot v = \sum_{i=1}^n F_i \cdot v_i + \sum_{j=1}^m M_j \cdot \omega_j, \quad (6)$$

unde  $v$  este viteza forței echivalente

$v_i$  - vitezele punctelor de aplicație ale forțelor  $\overline{F}_i$   $i = \overline{1, n}$

$\omega_j$  - vitezele unghiulare ale cuplurilor de forțe  $\overline{M}_j$   $j = \overline{1, m}$

Prin împărțirea relației (6) cu viteza  $v$ , relația de calcul a forței echivalente este:

$$F_{eqv} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i}{v} + \sum_{j=1}^m M_j \frac{\omega_j}{v} \quad (7)$$

Pentru a determina relația de calcul a momentului echivalent a întregului sistem de solicitări la care este supus sistemul mecanic, se consideră că acesta efectuează un lucru mecanic echivalent:

$$\overline{M}_{eqv} \cdot d\overline{\varphi} = dL, \quad (8)$$

sau

$$M_{eqv} \cdot d\varphi = dL \quad (9)$$

dacă vectorul deplasare unghiulară elementară  $d\overline{\varphi}$  este paralel cu vectorul moment. În acest caz, lucrul mecanic elementar se poate scrie după cum urmează:

$$M_{eqv} \cdot d\varphi = \sum_{i=1}^n F_i \cdot ds_i + \sum_{j=1}^m M_j \cdot d\varphi_j \quad (10)$$

Prin împărțirea cu timpul elementar  $dt$ , puterea instantanee se poate scrie

$$M_{eqv} \cdot \omega = \sum_{i=1}^n F_i \frac{ds_i}{dt} + \sum_{j=1}^m M_j \frac{d\varphi_j}{dt}, \quad (11)$$

unde  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  este viteza unghiulară corespunzătoare momentului echivalent  $M_{eqv}$ .

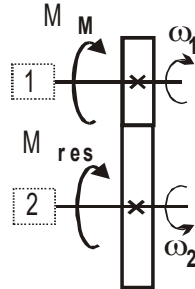
Relația de calcul a momentului echivalent se poate obține împărțind relația (11) prin  $\omega$ , astfel:

$$M_{eqv} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i}{\omega} + \sum_{j=1}^m M_j \frac{\omega_j}{\omega} \quad (12)$$

### 3. CALCULUL MOMENTELOR ECHIVALENTE ALE TRANSMISIILOR MECANICE CU ROȚI DINȚATE

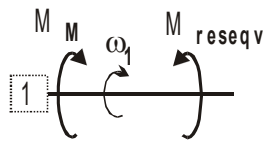
Se consideră o transmisie mecanică într-o singură treaptă ca în figura 1. Raportul de transmitere a mișcării este:

$$i = i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (13)$$

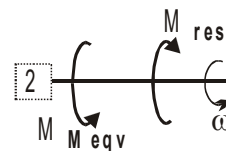


**Fig. 1** Modelul de calcul a transmisiei mecanice cu roți dințate  
 1-arbore conducător, 2-arbore condus,  $M_M$ -cuplu motor  
 $M_{res}$ -cuplu rezistent,  $\omega_1$  și  $\omega_2$ -vitezele unghiulare ale celor doi arbori

În figura 2 este reprezentată schema de calcul simplificată a momentului rezistent echivalent iar în figura 3 este reprezentată schema de calcul simplificată a momentului motor echivalent (schemele de calcul și momentele de inerție echivalente sunt conform [1]).



**Fig. 2** Schema de calcul a momentului rezistent echivalent la arborele conducător



**Fig. 3** Schema de calcul a momentului motor echivalent la arborele condus

#### 3.1. Calculul momentelor echivalente pentru transmisiile cu angrenaje ideale

Dacă se neglijează pierderile din angrenaj, momentele echivalente se pot calcula astfel:

-momentul rezistent echivalent (calculat la arborele conducător/motor 1)

$$M_{reseqv} = M_{res} \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{M_{res}}{i} \quad (14)$$

-momentul motor echivalent (calculat la arborele condus 2)

$$M_{Meqv} = M_M \frac{\omega_1}{\omega_2} = M_M \cdot i \quad (15)$$

În funcție de valoarea raportului de transmitere a mișcării  $i$ , se pot face următoarele considerații:

**1<sup>0</sup>** dacă  $i = 1$  (angrenaj care schimbă sensul de rotație a mișcării arborilor), atât momentul motor cât și cel rezistent rămân neschimbate;

**2<sup>0</sup>** dacă  $i > 1$  (angrenaj reductor / de reducere a mișcării), momentul motor (la arborele condus) este amplificat cu  $i$ , iar momentul rezistent (la arborele conducător) este redus cu valoarea lui  $i$ ;

**3<sup>0</sup>** dacă  $i < 1$  (angrenaj amplificator / de amplificare a mișcării), momentul motor (la arborele condus) este redus cu  $i$ , iar momentul rezistent (la arborele conducător) este amplificat cu valoarea lui  $i$ .

### 3.2. Calculul momentelor echivalente pentru transmisiile cu angrenaje reale (cu pierderi mecanice)

Pentru determinarea relațiilor analitice de calcul a momentelor echivalente pentru o transmisie mecanică reală într-o singură treaptă, se consideră modelul simplificat de calcul din figura 1, unde raportul de transmitere a mișcării de la arborele 1 (conducător) la arborele 2 (condus) este dat de relația (13), iar randamentul mecanic al treptei este  $\eta$ . Cuplul motor  $M_M$  este în sensul lui  $\overline{\omega}_1$  iar cuplul rezistent  $M_{res}$  este în sensul lui  $\overline{\omega}_2$ .

Pentru determinarea relației analitice a momentului rezistent echivalent la arborele conducător, se consideră schema de calcul din figura 2. Balanța de putere se poate scrie

$$-M_{reseqv} \cdot \omega_1 = -M_{res} \cdot \omega_2 - P_{loss}, \quad (16)$$

unde  $P_{loss}$  este puterea pierdută în angrenaj.

Puterea pierdută la arborele conducător 1 în funcție de viteza unghiulară a acestuia, se poate scrie

$$P_{loss} = M_{loss} \cdot \omega_1, \quad (17)$$

unde  $M_{loss}$  este cuplul pierdut în angrenaj.

Cu acestea, balanța de putere se scrie

$$(M_{reseqv} - M_{loss})\omega_1 = M_{res} \cdot \omega_2, \quad (18)$$

sau

$$M_{reseqv} - M_{loss} = M_{res} \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (19)$$

Pentru determinarea modului în care randamentul mecanic al angrenajului influențează relațiile de calcul ale cuplului rezistent echivalent, se împarte relația (19) la  $M_{reseqv}$  și se obține:

$$\frac{M_{reseqv} - M_{loss}}{M_{reseqv}} = \frac{M_{res}}{M_{reseqv}} \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (20)$$

În partea stângă a ecuației (20) este relația de definiție a randamentului mecanic al angrenajului, de unde se obține:

$$\eta = \frac{M_{res}}{M_{reseqv}} \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow M_{reseqv} = \frac{M_{res}}{\eta} \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{M_{res}}{i\eta} \quad (21)$$

Pentru determinarea relației de calcul a momentului motor echivalent la arborele condus 2, se consideră schema de calcul din figura 3. Balanța de putere se scrie:

$$M_{Meqv} \cdot \omega_2 = M_M \cdot \omega_1 - P_{loss} \quad (22)$$

Dacă se consideră relația (17), balanța de putere se poate scrie

$$M_{Meqv} \cdot \omega_2 = (M_M - M_{loss}) \omega_1, \quad (23)$$

sau:

$$M_{Meqv} \cdot \omega_2 = \frac{M_M - M_{loss}}{M_M} M_M \cdot \omega_1 \quad (24)$$

Deoarece raportul din dreapta ecuației (24) este randamentul  $\eta$ , momentul motor echivalent la arborele condus se poate determina astfel:

$$M_{Meqv} \cdot \omega_2 = \eta \cdot M_M \cdot \omega_1 \Rightarrow M_{Meqv} = \eta \cdot M_M \frac{\omega_1}{\omega_2} = M_M \cdot i \cdot \eta \quad (25)$$

Deoarece randamentul este subunitar, luarea în considerare a acestui la echivalarea momentelor (în raport cu cazul ideal) conduce la: scăderea momentului motor echivalent la arborele condus; creșterea momentului rezistent echivalent la arborele conducător.

#### 4. CONCLUZII

-articolul prezintă metoda generală de echivalare a cuplurilor statice sau dinamice aplicate sistemelor mecanice de transmitere a mișcării cu arbori elastici și angrenaje;  
-metodele de calcul și relațiile analitice ale cuplurilor echivalente pot fi utile inginerilor din proiectarea și analiza dinamică a sistemelor de transmisii, precum și studenților, masteranzilor și doctoranzilor din domeniul ingineriei mecanice.

#### BIBLIOGRAFIE

[1] C.N. Debeleac, N. Drăgan, "The dynamic modelling of the mechanical systems. Calculus of the equivalent mass and equivalent mass inertia", The Annals of "Dunărea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, Galati, 2007