

DINAMICA SISTEMELOR MECANICE ELASTICE 1DOF CU AMORTIZARE VÂSCOASĂ DE TIP ZENER. ANALIZA FACTORULUI DE AMPLIFICARE

THE DYNAMICS OF THE 1 DOF MECHANICAL SYSTEMS WITH VISCOUS DAMPING ZENER MODEL. AMPLITUDE FACTOR ANALYSIS

Gigel Florin CĂPĂȚĂNĂ¹, Aurora Maria POTÎRNICHE²,
Gianina Cornelia SPĂNU (ȘTEFAN)^{3,4}

¹Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: gcapatana@ugal.ro

²Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: Potarniche.Aurora@ugal.ro

³Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET

⁴Școala doctorală de Inginerie Mecanică și Industrială
e-mail: spanugianina@yahoo.com

Rezumat: Studiul unui sistem mecanic elastic cu un grad de libertate dinamică și amortizare vâscoasă presupune determinarea caracteristicilor de răspuns în condiții de solicitări dinamice diverse, în funcție de parametrii structurali specifici sistemului. În lucrare se analizează factorul de amplificare al răspunsului parametric al sistemului 1DOF în funcție de amortizarea vâscoasă, model reologic Zener; la o solicitare dinamică prin forță armonică $F_0 \sin \omega t$. În funcție de mărimea amortizării vâscoase ζ , de caracteristica structurală elastică N a modelului Zener și de caracteristica forței perturbatoare armonice Ω , sunt reprezentate grafic curbele de răspuns ale factorului de amplificare $A(\Omega, \zeta, N)$ și sunt analizate fenomenele de rezonanță de amplitudine.

Cuvinte cheie: model reologic Zener, vibrații forțate, amortizare vâscoasă, factor de amplificare

Abstract: The study of 1DOF elastic mechanical system with viscous damping consists of the determination of the response characteristics in conditions of various dynamic loads, depending on the structural specific parameters of the system. This paper is analyzing the amplification factor of the parametric steady-state response of the 1DOF system with viscous damping, Zener rheological model, perturbed by a harmonic force $F_0 \sin \omega t$. Depending on the viscous damping ratio ζ , the elastic structural characteristic N of Zener model and the harmonic perturbing force pulsation ω , the amplifier factor curves are drawn and the amplitude resonance phenomena are analyzed.

Keywords: rheological Zener model, steady-state vibration, viscous damping, amplitude factor

1. INTRODUCERE

Modelele reologice simple și modelele compuse sunt analizate în diverse lucrări de vâscoelasticitate [1] [2]. Caracteristicile reologice ale unor materiale și sisteme de rezemare vâsco-elastice sunt analizate în studiile dinamice ale unor modele fizico-matematice pentru sisteme mecanice cu sisteme de amortizare a șocurilor și vibrațiilor [3] [4] [5] [6]. Lucrările și tratatele de vibrații mecanice sau vibrațiile structurilor abordează problema modelării sistemelor de amortizare sau combatere a șocurilor și vibrațiilor [7] [8] [9] [10].

Modelele reologice simple sunt modelele liniare Hooke (elastic) și Newton (vâscos). Cele mai uzuale modele compuse, modelele Maxwell și modelul Voigt-Kelvin, se pot obține prin combinarea în serie sau în paralel a modelelor Hooke și Newton [11] [12].

Modelul reologic Zener este compus dintr-un model Hooke legat în paralel cu un model Maxwell [13] [14] ca în figura 1.

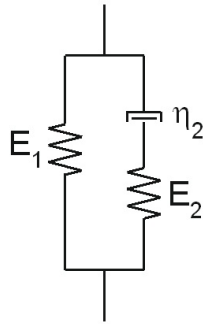


Fig. 1 Model reologic Zener [13] [14]

2. SISTEM MECANIC 1DOF CU ELEMENT VÂSCOELASTIC ZENER

Se consideră sistemul mecanic 1DOF (un grad de libertate dinamică) din figura 2, compus din masa m cu mișcare unidirecțională pe verticală și elementul de legătură vâsco-elastic **EVE**. Răspunsul dinamic al sistemului perturbat de forța verticală $F(t)$ este descris de legea mișcării forțate $z_f(t)$. Caracteristicile dinamice ale răspunsului sistemului $z_f(t)$ depind parametric de structura sistemului ($m, k_1, k_2 = Nk_1, b_2$) precum și de sollicitarea dinamică $F(t)$.

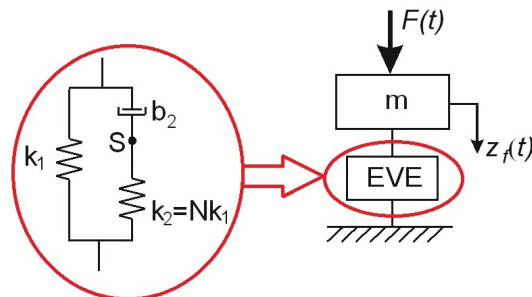


Fig. 2 Sistem mecanic elastic 1DOF cu element vâscoelastic Zener [15] [16]

3. FACTORUL DE AMPLIFICARE DINAMICĂ A AMPLITUDINII ÎN SISTEMUL MECANIC CU ELEMENT ZENER ȘI PERTURBAȚIE ARMONICĂ

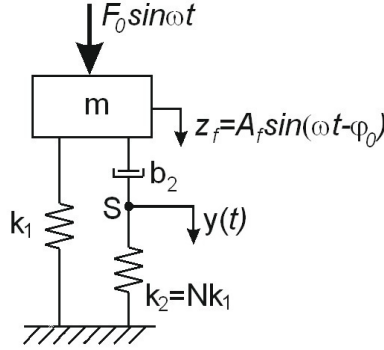


Fig. 3 Sistem mecanic elastic 1DOF cu element vâscoelastic Zener [17] [18]

Pentru sistemul mecanic elastic 1DOF din figura 3, ecuațiile diferențiale de mișcare se scriu [15] [16] [17] [18]:

$$\begin{cases} m\ddot{z}_f + b_2(\dot{z}_f - \dot{y}) + k_1 z_f = F_0 \sin \omega t \\ b_2(\dot{z}_f - \dot{y}) = k_2 y \end{cases} \quad (1)$$

După împărțirea cu m , prima ecuație a sistemului (1) devine

$$\ddot{z}_f + \frac{b_2}{m}(\dot{z}_f - \dot{y}) + \frac{k_1}{m} z_f = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (2)$$

unde: $n = \frac{b_2}{2m}$ este factorul de amortizare (model Maxwell)

$p = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ - pulsația proprie a sistemului elastic (model Hooke)

$\zeta = \frac{b_2}{b_{cr}} = \frac{b_2}{2\sqrt{mk_2}}$ - fracțiunea din amortizarea critică (factor de amortizare vâscoasă)

$\Omega = \frac{\omega}{p}$ - pulsația relativă

Dacă se ține seama de a 2-a ecuație a sistemului (1), ecuația diferențială de mișcare se poate scrie:

$$m\ddot{z}_f + k_2 y + k_1 z_f = F_0 \sin \omega t \quad (3)$$

Deoarece sistemul mecanic 1DOF este liniar, deplasarea $z_f(t)$ a masei m și

deplasarea $y(t)$ a punctului de legătură **S** din modelul Maxwell au deplasări armonice sincrone cu perturbația dar defazate în urma acesteia cu φ_0 respectiv α :

$$\begin{cases} z_f(t) = A_f \sin(\omega t - \varphi_0) \\ y(t) = A_Y \sin(\omega t - \alpha) \end{cases} \quad (4)$$

OBS.: pentru analiza sistemului echivalent neliniar a se vedea [19] [20].

Considerând mișcările armonice ale masei m și a punctului de legătură **S**, se obține amplitudinea vibrației forțate A_f respectiv factorul de amplificare a amplitudinii A după cum urmează:

$$A_f(\Omega, \zeta, N) = \frac{F_0}{k_1 + k_2} \sqrt{\frac{N^2 + 4\zeta^2\Omega^2}{N^2(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2(N + 1 - \Omega^2)^2}} \quad (5)$$

$$A(\Omega, \zeta, N) = \sqrt{\frac{N^2 + 4\zeta^2\Omega^2}{N^2(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2(N + 1 - \Omega^2)^2}} \quad (6)$$

4. ANALIZA PARAMETRICĂ A FACTORULUI DE AMPLIFICARE $A(\Omega, \zeta, N)$

Relația parametrică (6) este utilizată pentru analiza și reprezentarea grafică a factorului de amplificare $A(\Omega, \zeta, N)$ funcție de pulsația relativă Ω , pentru diferite valori ale factorului de amortizare vâscoasă ζ și rapoartelor elasticităților N .

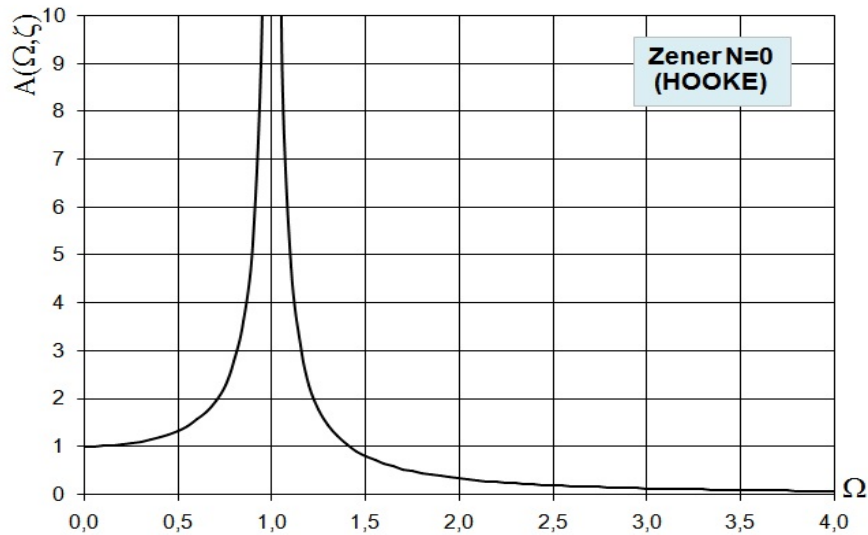


Fig. 4 Factorul de amplificare a amplitudinii - Model Zener N=0 (Model Hooke)

Dinamica sistemelor mecanice elastice 1DOF cu amortizare vâscoasă de tip Zener.
 Analiza factorului de amplificare

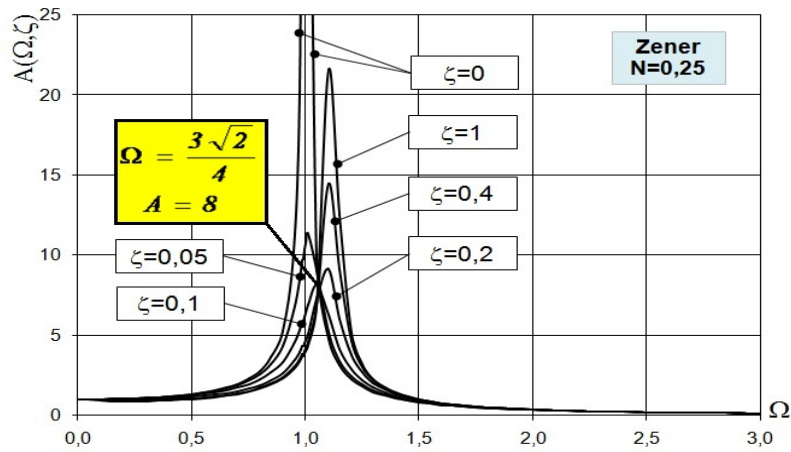


Fig. 5 Factorul de amplificare a amplitudinii - Model Zener $N=0,25$

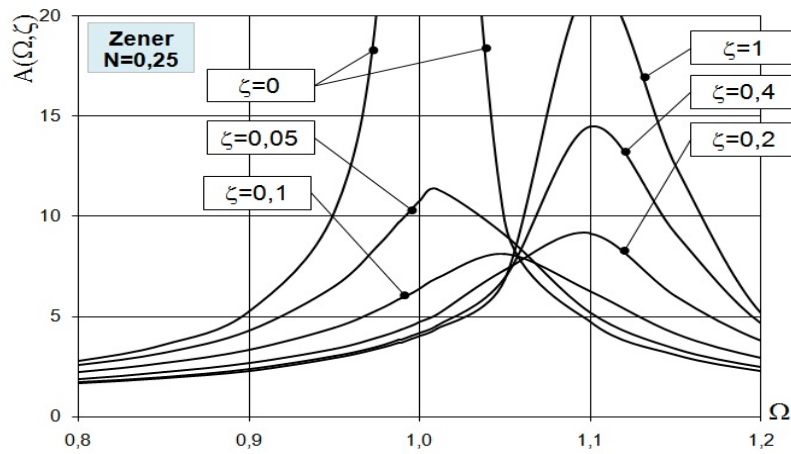


Fig. 6 Factorul de amplificare a amplitudinii - Model Zener $N=0,25$ (detaliu)

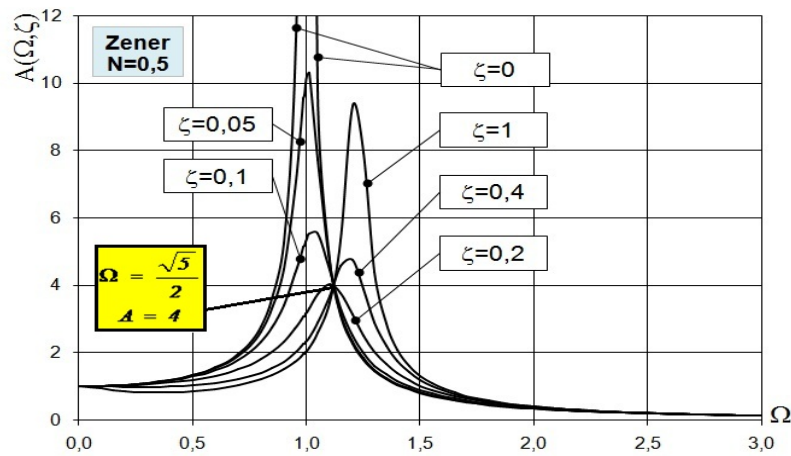


Fig. 7 Factorul de amplificare a amplitudinii - Model Zener $N=0,5$

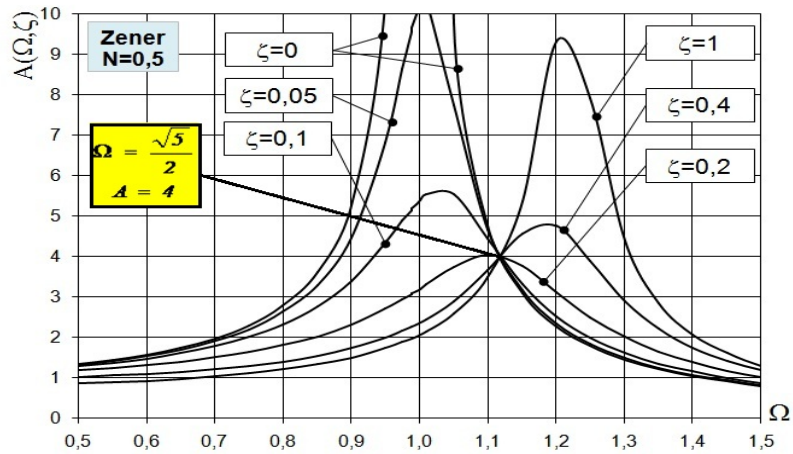


Fig. 8 Factorul de amplificare a amplitudinii - Model Zener $N=0,5$ (detaliu)

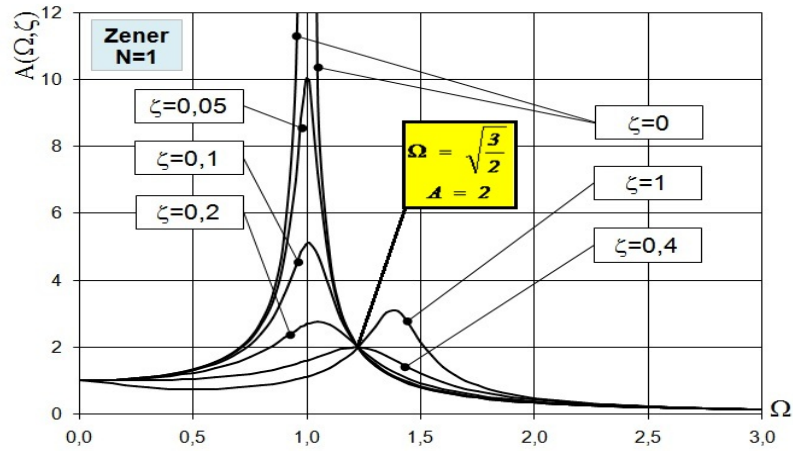


Fig. 9 Factorul de amplificare a amplitudinii - Model Zener $N=1$

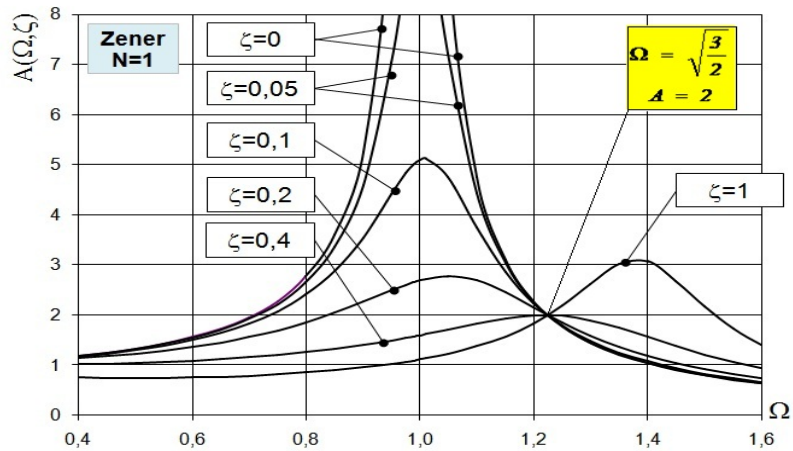


Fig. 10 Factorul de amplificare a amplitudinii - Model Zener $N=1$ (detaliu)

Dinamica sistemelor mecanice elastice 1DOF cu amortizare vâscoasă de tip Zener.
 Analiza factorului de amplificare

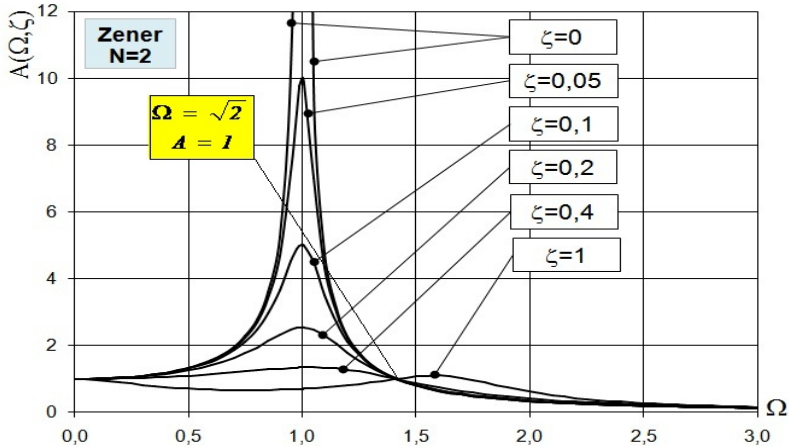


Fig. 11 Factorul de amplificare a amplitudinii - Model Zener N=2

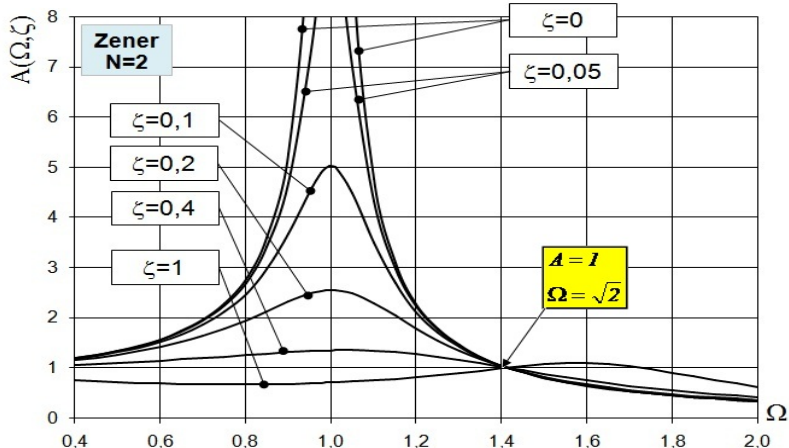


Fig. 12 Factorul de amplificare a amplitudinii - Model Zener N=2 (detaliu)

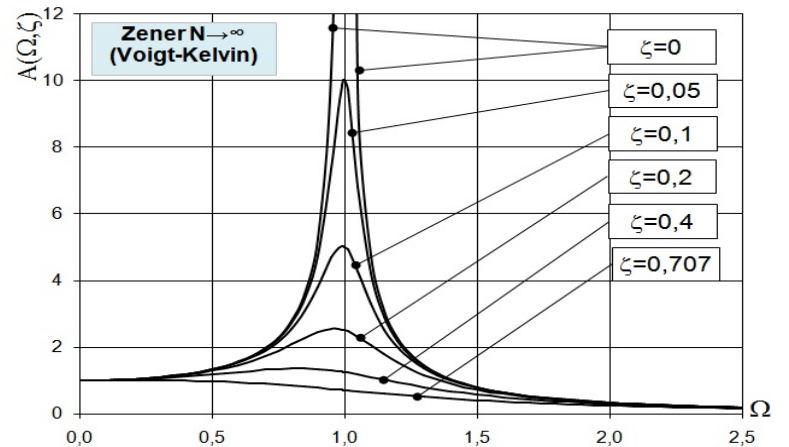


Fig. 13 Factorul de amplificare a amplitudinii - Model Zener $N \rightarrow \infty$ (Model V-K)

Pentru determinarea punctelor comune curbelor parametrice din diagramele factorilor de amplificare ai amplitudinilor, se pune condiția

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{A(\Omega, \zeta_1, N) = A(\Omega, \zeta_2, N)} \\
 & \Downarrow \\
 & \sqrt{\frac{N^2 + 4\zeta_1^2\Omega^2}{N^2(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta_1^2\Omega^2(N+1-\Omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{N^2 + 4\zeta_2^2\Omega^2}{N^2(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta_2^2\Omega^2(N+1-\Omega^2)^2}} \\
 & \Rightarrow \frac{N^2 + 4\zeta_1^2\Omega^2}{N^2(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta_1^2\Omega^2(N+1-\Omega^2)^2} = \frac{N^2 + 4\zeta_2^2\Omega^2}{N^2(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta_2^2\Omega^2(N+1-\Omega^2)^2} \\
 & N^4(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta_1^2\Omega^2N^2(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta_2^2N^2\Omega^2(N+1-\Omega^2)^2 + 16\zeta_1^2\zeta_2^2\Omega^2(N+1-\Omega^2)^2 = \\
 & = N^4(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta_2^2\Omega^2N^2(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta_1^2N^2\Omega^2(N+1-\Omega^2)^2 + 16\zeta_1^2\zeta_2^2\Omega^2(N+1-\Omega^2)^2 \\
 & 4\zeta_1^2\Omega^2N^2(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta_2^2N^2\Omega^2(N+1-\Omega^2)^2 = 4\zeta_2^2\Omega^2N^2(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta_1^2N^2\Omega^2(N+1-\Omega^2)^2 \\
 & \zeta_1^2(1-\Omega^2)^2 + \zeta_2^2(N+1-\Omega^2)^2 = \zeta_2^2(1-\Omega^2)^2 + \zeta_1^2(N+1-\Omega^2)^2 \\
 & (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \left[(1-\Omega^2)^2 - (N+1-\Omega^2)^2 \right] = 0 \Rightarrow -N(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 + \zeta_2)(N+2-2\Omega^2) = 0
 \end{aligned}$$

Soluția acceptabilă este:

$$N+2-2\Omega^2 = 0 \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{N}{2} + 1}$$

Pentru valorile $N \in \{0.25, 0.5, 1, 2\}$, punctele de intersecție ale curbelor parametrice $A(\Omega, \zeta, N)$ sunt:

$$\left. \begin{array}{l} N = 0.25 \\ \Omega = \sqrt{\frac{9}{8}} \end{array} \right\} \Rightarrow A\left(\sqrt{\frac{9}{8}}, \zeta, 0.25\right) = \sqrt{\frac{\frac{1}{16} + 4\zeta^2 \frac{9}{8}}{\frac{1}{16}\left(1-\frac{9}{8}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{9}{8}\left(\frac{5}{4}-\frac{9}{8}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1+72\zeta^2}{64(1+72\zeta^2)}} = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 0.5 \\ \Omega = \sqrt{\frac{5}{4}} \end{array} \right\} \Rightarrow A\left(\sqrt{\frac{5}{4}}, \zeta, 0.5\right) = \sqrt{\frac{1+20\zeta^2}{16(1+20\zeta^2)}} = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 1 \\ \Omega = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow A\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \zeta, 1\right) = \sqrt{\frac{1+6\zeta^2}{\frac{1}{4}(1+6\zeta^2)}} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 2 \\ \Omega = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(\sqrt{2}, \zeta, 2) = \sqrt{\frac{4+8\zeta^2}{4+8\zeta^2}} = 1$$

5. CONCLUZII

Din analiza relației (6) a factorului de amplificare, se pot concluziona următoarele:

1) dacă $N=0$ sau $\zeta=0 \rightarrow$ se anulează modelul M, modelul Z devine model H; diagrama $A(\Omega)$ este reprezentată în figura 5; factorul de amplificare a amplitudinii este:

$$A_{N=0}(\Omega) = A_{\zeta=0}(\Omega) = \frac{1}{|1-\Omega^2|} \quad (7)$$

b) dacă $N \rightarrow \infty \rightarrow$ modelul M devine model N, modelul Zener model devine model V-K; diagrama $A(\Omega, \zeta)$ este reprezentată în figura 13; factorul de amplificare a amplitudinii este:

$$A_{N \rightarrow \infty}(\Omega, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}} \quad (8)$$

c) pentru modelul H, rezonanța de amplitudine se obține la $\Omega=1$ (fig. 5);
d) pentru modelul V-K, rezonanța de amplitudine se obține pentru $\Omega < 1$ (fig. 13);
e) pentru modelul reologic complex Zener, rezonanța de amplitudine se obține pentru valori supraunitare ale pulsației relative $\Omega > 1$; valoarea factorului de amplificare la rezonanță depinde atât de mărimea amortizării vâscoase ζ cât și de mărimea raportul elasticităților N (figurile 6-12).

BIBLIOGRAFIE

- [1] **R.M. Christensen**, *Theory of Viscoelasticity*, Dover Publications Inc., New York, 2010
[2] **P. Bratu**, *Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje*, Ed. Tehnică, București, 1990
[3] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems Dynamics of the Rigid Body with Structural Symmetries. Modal Analysis. Transmitted Forces and Moments*, Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009
[4] **N. Dragan**, *Modal calculus of the reinforced concrete bridges modeled as a rigid solid beared on viscous elastic neoprene supports*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVI, ISSN 1224-5615, Galați, 2010
[5] **P. Bratu, N. Dragan**, *Theoretical and numerical considerations on the composite neoprene used at vibration and shock isolations isolators*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVI, ISSN 1224-5615, Galați, 2010

- [6] **N. Dragan**, *Considerations on the composite neoprene vibration isolators used for the mechanical systems bearings. The dynamics of the non-linear models*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI) NR2, ISSN 1583-0691, 2012
- [7] **Gh. Ene, C. Pavel**, *Introducere în tehnica izolării vibrațiilor și a zgomotului*, Editura Matrix Rom, București, 2012
- [8] **Gh. Buzdugan, L. Fetcu, M. Radeș**, *Vibrații mecanice*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [9] **P. Bratu**, *Analiza structurilor elastice. Comportarea la acțiuni statice și dinamice*, Ed. Impuls, București, 2011
- [10] **P. Bratu**, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, București, 2000
- [11] **N. Drăgan**, *Analiza dinamică a sistemelor mecanice cu reazeme elastomerice. Modelul Voigt-Kelvin*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 9 (2018) nr. 2, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2018
- [12] **G.C. Spănu (Ștefan), G.F. Căpățână**, *Analiza dinamică a sistemelor 1DOF cu reazeme elastomerice. Modelul reologic Maxwell*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 9 (2018) nr. 4, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2018
- [13] **N. Dragan**, *Rheological SLS model. Dynamic parameters of the systems with viscous damping. Part 1: Amplitude factor*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2017
- [14] **N. Dragan**, *Rheological SLS model. Dynamic parameters of the systems with viscous damping. Part 2: Transmissibility factor and isolation degree*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2017
- [15] **G.C. Spănu (Ștefan), N. Drăgan**, *Analiza transmisibilității și a gradului de izolare a vibrațiilor la sistemele mecanice cu amortizare structurală. Modelul Zener*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 8 (2017) nr. 4, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2017
- [16] **G.C. Spănu (Ștefan)**, *Analiza factorului de amplificare la sistemele mecanice cu amortizare structurală. Modelul Zener*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 9 (2018) nr. 1, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2018
- [17] **N. Dragan**, *Dynamic analysis of the parameters of the mechanical systems with structural damping. Viscoelastic SLS model. Part 1: Amplitude factor*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2016
- [18] **N. Dragan**, *Dynamic analysis of the parameters of the mechanical systems with structural damping. Viscoelastic SLS model. Part 2: Transmissibility factor and isolation degree*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2016
- [19] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems with nonlinear damping. Power and amplitude numerical analysis*, Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009
- [20] **N. Drăgan**, *Contribuții la analiza și optimizarea transportului prin vibrații - teza de doctorat*, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați, 2002