

ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMELOR MECANICE DE TRANSMITERE CU ARBORI ELASTICI. DETERMINAREA MOMENTELOR DE TORSIUNE ECHIVALENTE

THE DYNAMIC ANALYSIS OF THE MECHANICAL DRIVING SYSTEMS WITH ELASTIC SHAFTS. CALCULUS OF THE EQUIVALENT TORQUES

Aurora Maria POTÎRNICHE¹, Gianina Cornelia SPÂNU (ȘTEFAN)^{2,3},
Gigel Florin CĂPĂȚĂNĂ⁴

¹Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: Potarniche.Aurora@ugal.ro

²Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET

³Școala doctorală de Inginerie Mecanică și Industrială
e-mail: spanugianina@yahoo.com

⁴Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: gcapatana@ugal.ro

Rezumat: *Lucrarea prezintă etapele de realizare a modelelor dinamice de calcul (modele fizice, modele matematice) pentru determinarea solicitărilor statice și dinamice echivalente specifice sistemelor mecanice cu arbori elastici și angrenaje cu roți dințate. Aceste sisteme sunt utilizate pentru transmiterea și transformarea mișcării de rotație din sistemele de acționare a mașinilor și echipamentelor mecanice tehnologice. Studiul are în vedere atât sistemele ideale (fără pierderi de energie), cât și sistemele reale în funcție de randamentul mecanic.*

Cuvinte cheie: *momente de torsiune echivalente, transmisii cu arbori elastici*

Abstract: *This study presents the dynamic calculation models (physical models, mathematical models) in order to establish of the equivalent static and dynamic specific loads of the mechanical systems with elastic shafts and gears. These drive systems are used for transmitting and transforming the rotation motion of the technological mechanical equipments. The study considers both ideal mechanical systems (no energy loss) and actual systems based on mechanical efficiency.*

Keywords: *torsional equivalent moments, elastic shaft transmissions*

1. INTRODUCERE

Studiul comportării dinamice a unui sistem mecanic se bazează pe modelul fizic care trebuie să redea în mod esențial structura funcțională. În acest caz, este necesară elaborarea schemei structurale a sistemului care trebuie să reflecte funcționalitatea mașinii/utilajului [1]

[2].

În studiul dinamic se utilizează modele de calcul care nu mai păstrează configurațiile geometrice sau mecanice ale mașinii reale dar, care trebuie să fie astfel concepute încât să descrie cu fidelitate comportarea dinamică a elementelor componente și ansamblului mașinii [3].

În general, elementele componente ale unei mașini reale sunt caracterizate prin rigidități de valori diferite, astfel încât, în anumite condiții elasticitatea unora fiind importantă se abandonează teoria solidului rigid (din mecanica teoretică, teoria mecanismelor). Deci, se impune o abordare a comportării dinamice în care lanțul cinematic conține și elemente elastice [4] [5] [6].

Elaborarea schemei dinamice de calcul implică parcurgerea următoarelor etape [7] [8] [9]:

- stabilirea schemei cinematice a sistemului mecanic de la motorul de acționare până la organul de lucru al mașinii;
- stabilirea elementelor masice și elastice, precum și a solicitărilor statice și dinamice;
- definitivarea schemei echivalente de calcul prin introducerea elementelor cu masă redusă și a celor cu elasticitate redusă, precum și a solicitărilor statice și dinamice echivalente.

Principiul de reducere a momentelor torsionale din sistemele mecanice cu arbori elastici constă în determinarea unor momente caracteristice echivalente ale sistemelor de solicitări dinamice ce acționează în aceste sisteme. Aceste momente sunt echivalente dacă execută același lucru mecanic, în același interval de timp [1] [2] [10] [11] [12].

2. MODELAREA SISTEMULUI DE ACȚIONARE ȘI TRANSMITERE CU ARBORI ELASTICI ȘI ANGRENAJE CU ROȚI DINȚATE

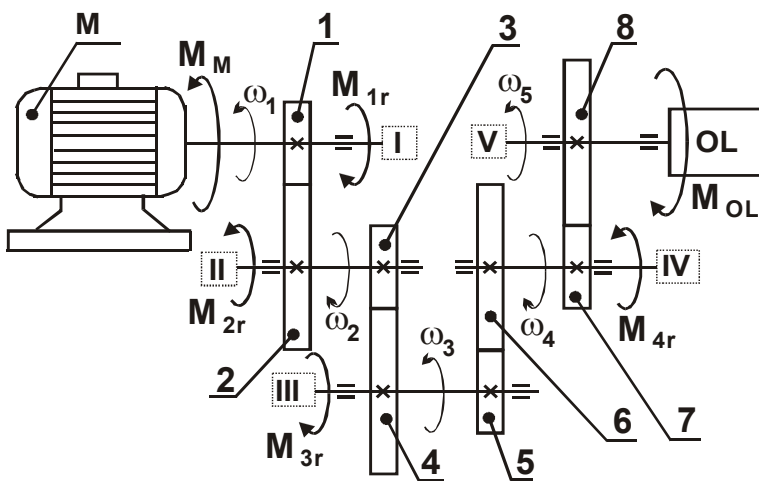


Fig. 1 Schema cinematică a mecanismului de acționare cu transmisie în 4 trepte

Se consideră sistemul de acționare și transmitere a mișcării cu schema cinematică din figura 1. Semnificațiile notațiilor din figură sunt următoarele (subansamble componente) [1] [2] [13] [14]:

M - motor de acționare

OL - organ de lucru

Calculul solicitărilor dinamice echivalente în sistemele mecanice de transmitere a mișcării cu arbori elastici

1,2,3,4,5,6,7,8 - roți dințate angrenate (RD)

I-arbore motor / conducător / de antrenare

V-arbore condus / al organului de lucru

II,III,IV - arbori intermediari

Momentele de torsiune ce acționează asupra arborilor sistemului sunt:

-momentul de acționare (motor) M_M

-momentele rezistente (datorate pierderilor din lagăre) M_{ir} , $i = \overline{1,4}$

-momentul rezistent de la organul de lucru (moment tehnologic) M_{OL} (include și momentul rezistent din lagărele arborelui condus V).

3. PARAMETRII CINEMATICI ȘI DE RANDAMENT AI ANGRENAJELOR SISTEMULUI MECANIC DE TRANSMITERE A MIȘCĂRII

Considerând funcționarea în regim stabilizat pentru sistemul de acționare din figura 1, rapoartele de transmitere a mișcării pentru fiecare angrenaj se pot scrie în funcție de parametrii cinematici astfel [1] [2]:

$$\text{-angrenaj } RD1-RD2: \quad i_1 \equiv i_{12} = \frac{\omega_{RD1}}{\omega_{RD2}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (1)$$

$$\text{-angrenaj } RD3-RD4: \quad i_2 \equiv i_{34} = \frac{\omega_{RD3}}{\omega_{RD4}} = \frac{\omega_2}{\omega_3} \quad (2)$$

$$\text{-angrenaj } RD5-RD6: \quad i_3 \equiv i_{56} = \frac{\omega_{RD5}}{\omega_{RD6}} = \frac{\omega_3}{\omega_4} \quad (3)$$

$$\text{-angrenaj } RD7-RD8: \quad i_4 \equiv i_{78} = \frac{\omega_{RD7}}{\omega_{RD8}} = \frac{\omega_4}{\omega_5} \quad (4)$$

4. CALCULUL MOMENTELOR DE TORSIUNE ECHIVALENTE

4.1. Calculul momentelor echivalente la arborele motor I

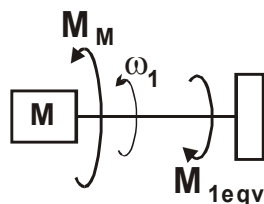


Fig. 2 Schema de calcul a momentului echivalent la arborele motor I

Pentru echivalarea tuturor momentelor de torsiune la arborele motor I, se consideră schema de calcul simplificată din figura 2. În acest caz, toate momentele de torsiune se vor echivala la arborele motor I, cu excepția momentului motor M_M .

Dacă se neglijează pierderile din angrenaje, balanța de puteri se poate scrie [15] [16]

$$-M_{1eqv} \cdot \omega_1 = -M_{1r} \cdot \omega_1 - M_{2r} \cdot \omega_2 - M_{3r} \cdot \omega_3 - M_{4r} \cdot \omega_4 - M_{OL} \cdot \omega_5, \quad (5)$$

unde semnele "-" sunt date de sensurile diferite ale momentelor de torsiune și cele ale vitezelor unghiulare ale arborilor unde acționează aceste cupluri (toate momentele de torsiune sunt rezistente).

Dacă relația (5) este înmulțită cu -1 și se împarte cu ω_1 , se obține momentul echivalent total la arborele motor **I** astfel:

$$M_{I_{eqv}} = M_{1r} + M_{2r} \frac{\omega_2}{\omega_1} + M_{3r} \frac{\omega_3}{\omega_1} + M_{4r} \frac{\omega_4}{\omega_1} + M_{OL} \frac{\omega_5}{\omega_1} \quad (6)$$

Dacă se consideră relațiile de definiție ale rapoartelor de transmitere a mișcării (1) (2) (3) (4), momentul echivalent total la arborele motor **I** se poate scrie astfel:

$$M_{I_{eqv}} = M_{1r} + \frac{M_{2r}}{i_1} + \frac{M_{3r}}{i_1 i_2} + \frac{M_{4r}}{i_1 i_2 i_3} + \frac{M_{OL}}{i_1 i_2 i_3 i_4} \quad (7)$$

Pentru calculul momentelor de torsiune echivalente, se consideră că randamentele mecanice ale angrenajelor sunt:

$$RD1-RD2 \rightarrow \eta_1 \quad RD3-RD4 \rightarrow \eta_2 \quad RD5-RD6 \rightarrow \eta_3 \quad RD7-RD8 \rightarrow \eta_4$$

Deoarece toate momentele echivalate la arborele motor **I** sunt rezistente, momentul de torsiune echivalent total în cazul în care **se iau în considerare randamentele angrenajelor** se poate scrie după cum urmează [17] [18]:

$$M_{I_{eqv}} = M_{1r} + \frac{M_{2r}}{i_1 \eta_1} + \frac{M_{3r}}{i_1 i_2 \eta_1 \eta_2} + \frac{M_{4r}}{i_1 i_2 i_3 \eta_1 \eta_2 \eta_3} + \frac{M_{OL}}{i_1 i_2 i_3 i_4 \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4} \quad (8)$$

4.2. Calculul momentelor echivalente la arborele organului de lucru **V**

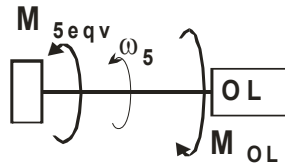


Fig. 3 Schema de calcul a momentului echivalent la arborele organului de lucru **V**

În figura 3 este reprezentat modelul simplificat de calcul a momentului de torsiune total echivalent la arborele organului de lucru **V**. În acest caz, cu excepția momentului de torsiune de la organul de lucru, toate momentele de torsiune se echivalează la arborele motor.

Dacă se neglijează pierderile din angrenaje, balanța de putere se poate scrie după cum urmează:

$$M_{5eqv} \cdot \omega_5 = -M_{4r} \cdot \omega_4 - M_{3r} \cdot \omega_3 - M_{2r} \cdot \omega_2 - M_{1r} \cdot \omega_1 + M_M \cdot \omega_1 \quad (9)$$

Dacă relația (9) se împarte cu ω_5 , expresia momentului de torsiune total echivalent la arborele organului de lucru se poate scrie

Calculul solicitărilor dinamice echivalente în sistemele mecanice de transmitere a mișcării cu arbori elastici

$$M_{5eqv} = -M_{4r} \frac{\omega_4}{\omega_5} - M_{3r} \frac{\omega_3}{\omega_5} - M_{2r} \frac{\omega_2}{\omega_5} - M_{1r} \frac{\omega_1}{\omega_5} + M_M \frac{\omega_1}{\omega_5}, \quad (10)$$

sau

$$M_{5eqv} = (M_M - M_{1r}) i_1 i_2 i_3 i_4 - M_{2r} i_2 i_3 i_4 - M_{3r} i_3 i_4 - M_{4r} i_4 \quad (11)$$

Dacă **se iau în considerare randamentele angrenajelor**, expresia momentului de torsiune total echivalent la arborele V al organului de lucru se poate scrie astfel:

$$M_{5eqv} = M_M i_1 i_2 i_3 i_4 \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 - M_{1r} \frac{i_1 i_2 i_3 i_4}{\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4} - M_{2r} \frac{i_2 i_3 i_4}{\eta_2 \eta_3 \eta_4} - M_{3r} \frac{i_3 i_4}{\eta_3 \eta_4} - M_{4r} \frac{i_4}{\eta_4} \quad (12)$$

4.3. Calculul momentelor echivalente la arborele intermediar III al transmisiei mecanice

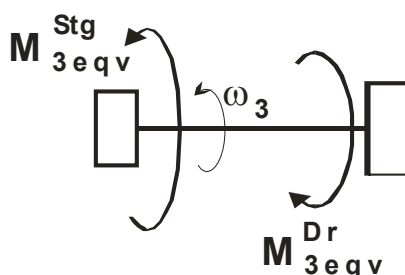


Fig. 4 Schema de calcul a momentului echivalent la arborele intermediar III

Se consideră reducerea momentelor de torsiune la arborele intermediar III [1] [2] [14]. În acest caz, se vor determina momentele de torsiune totale echivalente la stânga și la dreapta arborelui, schema simplificată de calcul fiind reprezentată în figura 4. Momentele echivalente totale sunt:

- ▶ M_{3eqv}^{Stg} - momentul echivalent total din stânga arborelui III (momentul motor echivalent, momentele rezistente echivalente de la arborii I, II și III)
- ▶ M_{3eqv}^{Dr} - momentul echivalent total din dreapta arborelui III (momentul echivalent al organului de lucru, momentul rezistent echivalent de la arborele IV).

Dacă se iau în considerare tipurile de lucru mecanic (motor, rezistent) efectuate de momentele de torsiune, balanțele de putere la arborele intermediar III se scriu după cum urmează:

▶ la stânga arborelui III

$$M_{3eqv}^{stg} \cdot \omega_3 = -M_{3r} \cdot \omega_3 - M_{2r} \cdot \omega_2 - M_{1r} \cdot \omega_1 + M_M \cdot \omega_1, \quad (13)$$

de unde, prin împărțire cu ω_3 , se obține

$$M_{3eqv}^{stg} = -M_{3r} - M_{2r} \frac{\omega_2}{\omega_3} - M_{1r} \frac{\omega_1}{\omega_3} + M_M \frac{\omega_1}{\omega_3} \quad (14)$$

și, dacă se ține seama de expresiile rapoartelor de transmitere a mișcării date de relațiile (1), (2), (3) și (4)

$$M_{3eqv}^{stg} = (M_M - M_{1r}) \cdot i_1 \cdot i_2 - M_{2r} \cdot i_2 - M_{3r} \quad (15)$$

► la dreapta arborelui III

$$-M_{3eqv}^{Dr} \cdot \omega_3 = -M_{4r} \cdot \omega_4 - M_{OL} \cdot \omega_5, \quad (16)$$

și, prin împărțire cu “ $-\omega_3$ ”:

$$M_{3eqv}^{Dr} = M_{4r} \frac{\omega_4}{\omega_3} + M_{OL} \frac{\omega_5}{\omega_3} \quad (17)$$

Relația (17) poate fi scrisă în funcție de rapoartele de transmitere a mișcării (1), (2), (3) și (4) astfel:

$$M_{3eqv}^{Dr} = \frac{M_{4r}}{i_3} + \frac{M_{OL}}{i_3 i_4} \quad (18)$$

Dacă se iau în considerare pierderile mecanice din angrenajele transmisiei prin intermediul randamentelor mecanice η_1 , η_2 , η_3 și η_4 , momentele totale echivalente la arborele intermediar III au următoarele expresii analitice:

► la stânga arborelui III

$$M_{3eqv}^{stg} = M_M i_1 i_2 \eta_1 \eta_2 - M_{1r} \frac{i_1 i_2}{\eta_1 \eta_2} - M_{2r} \frac{i_2}{\eta_2} - M_{3r} \quad (19)$$

► la dreapta arborelui III

$$M_{3eqv}^{Dr} = \frac{M_{4r}}{i_3 \eta_3} + \frac{M_{OL}}{i_3 i_4 \eta_3 \eta_4} \quad (20)$$

4.4. Calculul momentelor echivalente la arborele intermediar II al transmisiei mecanice

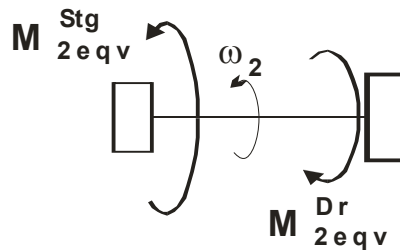


Fig. 5 Schema de calcul a momentului echivalent la arborele intermediar II

Calculul solicitărilor dinamice echivalente în sistemele mecanice de transmitere a mișcării cu arbori elastici

În figura 5 este prezentată schema simplificată de calcul a momentelor totale de torsiune la arborele intermediar II al transmisiei mecanice.

În mod similar cu echivalarea momentelor totale la arborele III, la arborele intermediar II momentele totale echivalente se pot determina cu următoarele relații de calcul:

■ în cazul neglijării pierderilor din angrenaje

$$M_{2eqv}^{stg} = (M_M - M_{1r}) \cdot i_1 - M_{2r} \quad (21)$$

$$M_{2eqv}^{Dr} = \frac{M_{3r}}{i_2} + \frac{M_{4r}}{i_2 i_3} + \frac{M_{OL}}{i_2 i_3 i_4} \quad (22)$$

■ în cazul luării în considerare a pierderilor din angrenaje (prin intermediul randamentelor)

$$M_{2eqv}^{stg} = M_M i_1 \eta_1 - M_{1r} \frac{i_1}{\eta_1} - \frac{M_{2r}}{\eta_2} \quad (23)$$

$$M_{2eqv}^{Dr} = \frac{M_{3r}}{i_2 \eta_2} + \frac{M_{4r}}{i_2 i_3 \eta_2 \eta_3} + \frac{M_{OL}}{i_2 i_3 i_4 \eta_2 \eta_3 \eta_4} \quad (24)$$

4. CONCLUZII

-lucrarea prezintă modul în care se poate face echivalarea solicitărilor statice sau dinamice de tipul momentelor de torsiune ce apar în mecanismele de transmitere și transformare a mișcării cu arbori elastici și angrenaje, specifice sistemelor de acționare mecanică a mașinilor și echipamentelor tehnologice de proces;

-metodele de calcul, relațiile analitice determinate pentru sistemul cu 5 arbori elastici și 4 angrenaje cu roți dințate pot fi generalizate pentru orice sistem de transmisie, cu un număr mai mare sau mai mic de elemente structurale specifice sistemelor mecanice; relațiile de calcul determinate și, mai ales, principiile și metodele utilizate sunt utile specialiștilor și studenților din domeniul ingineriei mecanice.

BIBLIOGRAFIE

- [1] N. Drăgan, *Analiza dinamică a echipamentelor cu arbori elastici*, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie din Brăila, 2006
- [2] N. Drăgan, *Dinamica mașinilor (CD)*, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie din Brăila, 2007
- [3] C.N. Debeleac, N. Drăgan, *The dynamic modelling of the mechanical systems. Calculus of the equivalent mass and equivalent mass inertia*, The Annals of “Dunărea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, Galati, 2007
- [4] N. Drăgan, *The analysis of the axial springs' weight influence on the resonance characteristic of the elastical mechanical systems*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2006
- [5] N. Drăgan, *The analysis of the torsional springs' inertia influence on the resonance characteristic of the elastical mechanical systems*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2006
- [6] C.N. Debeleac, N. Drăgan., *The analysis of the bending springs' weight influence on the*

- resonance characteristic of the elastical mechanical systems*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2007
- [7] **G. Axinti, N. Drăgan, C.N. Bordea**, *Elemente de mecanică analitică cu aplicații în mecanica tehnică*, ISBN 973-8132-32-0, Editura Impuls, București, 2002
- [8] **P.P. Bratu, N. Drăgan**, *Vibrații mecanice. Aplicații*, ISBN 973-98409-8-1, Editura Impuls, București, 1998
- [9] **N. Drăgan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems Dynamics of the Rigid Body with Structural Symmetries. Modal Analysis. Transmitted Forces and Moments*, Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009
- [10] **N. Drăgan.**, *The dynamic analysis of the mechanical systems. Calculus of the equivalent dynamic forces and torques*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2008
- [11] **N. Drăgan.**, A. Potârniche, *The calculus of the equivalent rigidity coefficients for the shafts of the elastical systems*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2008
- [12] **N. Drăgan.**, *Dynamic calculation of the mechanical transmissions with gears and elastic shafts*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 1 Issue XVII, ISSN 1224-5615, Galați, 2011
- [13] **C. Constatin, N. Drăgan.**, *Analiza dinamică a sistemelor de transmisii cu arbori elastici - calculul rigidităților echivalente*, Buletinul celui de-al XXIV-lea Simpozion național de utilaje pentru construcții SINUC 2018 (CD), ISSN 2285-9209, ISSN L 2285-9209, Universitatea Tehnică de Construcții, București, 8 iunie 2018
- [14] **M.I. Chiriță, N. Drăgan.**, *Analiza dinamică a sistemelor de transmisii cu arbori elastici - calculul solicitărilor dinamice echivalente*, Buletinul celui de-al XXIV-lea Simpozion național de utilaje pentru construcții SINUC 2018 (CD), ISSN 2285-9209, ISSN L 2285-9209, Universitatea Tehnică de Construcții, București, 8 iunie 2018
- [15] **N. Drăgan.**, *The analysis of the influence of distributed mass of the springs on the resonance of the elastical mechanical systems*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI) NR1, ISSN 1583-0691, 2012
- [16] **N. Drăgan.**, *Considerations on the influence of distributed mass of the bending springs on the resonance of the 1DOF elastical mechanical systems*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI) NR2, ISSN 1583-0691, 2012
- [17] **N. Drăgan.**, *Theoretical studies regarding the dynamics of the rigid body with elastic bearings and structural symmetries, excited by harmonical forces and couples*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. VII (XVII), Section Mechanics, ISSN 1583-0691, 2008
- [18] **N. Drăgan.**, *Aspects regarding the dynamics of the vibrating conveyors modeled as 3DOF elastic systems*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVIII, ISSN 1224-5615, Galați, 2012
- [19] **N. Drăgan.**, *The dynamic analysis of the inertial vibrating screens modeled as 3DOF elastic systems*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVIII, ISSN 1224-5615, Galați, 2012
- [20] **N. Drăgan., C.N. Debeleac, A. Leopa, D.G. Anghelache**, *The dynamic of the forced steady-state vibrations for the vertical towers chillers with axial flow fan*, Proceedings of "trans & MOTAUTO'05+" Conference Veliko Tarnovo 23-25 November 2005, vol. 3 "Mechanics, dynamics, strenght and reliability. Theory of machines and mechanisms", ISBN 954-9322-11-4, Sofia 2005