

ANALIZA DINAMICĂ A FORTELOR TRANSMISE FUNDAȚIEI DE SOLIDUL-RIGID CU MIȘCĂRI DECUPLATE

DYNAMIC ANALYSIS OF THE TRANSMITTED FORCES TO THE FOUNDATION BY THE RIGID-BODY WITH DECUPLATED MOVEMENTS

Aurora Maria POTÎRNICHE¹, Gianina Cornelia SPÂNU (ȘTEFAN)²
Gigel Florin CĂPĂȚĂNĂ³

¹Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: Potarniche.Aurora@ugal.ro

²Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, Romania, Școala doctorală de Inginerie Mecanică și Industrială
e-mail: spanugianina@yahoo.com

³Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: gcapatana@ugal.ro

Rezumat: *Articolul stabilește expresiile forțelor transmise fundației de către solidul-rigid cu legături elastice, perturbat de unele tipuri de forțe armonice și/sau momente mecanice armonice. Cu expresiile deformărilor și deplasărilor suporturilor solidului-rigid și a amplitudinilor vibrațiilor forțate, se obține relațiile generale de calcul ale forțelor transmise.*

Cuvinte cheie: *solid-rigid cu simetrii structurale, mișcări decuplate, vibrații forțate armonice, forțe transmise fundației*

Abstract: *The article establish the expressions of the transmitted forces to the foundation by the rigid-body with elastic bearings, perturbed by some types of harmonic forces and/or harmonic mechanical torques. With the expressions of deformations and movements of the solid-body's supports and the forms of the forced vibrations amplitudes, it obtains the formula of transmitted forces.*

Keywords: *solid-body with structural symmetries, decoupled movements, steady-state harmonic vibration, transmitted forces to the foundation*

1. INTRODUCERE. MODELAREA FORTELOR TRANSMISE FUNDAȚIEI PRIN INTERMEDIUL LEGĂTURILOR VÂSCO-ELASTICE

Analiza regimului dinamic de funcționare a mașinilor și utilajelor tehnologice cu acțiune vibrantă sau a celor la care solicitările dinamice deterministe sau aleatoare rezultă din procesul de obținere sau transmitere a mișcării constă în determinarea răspunsului sistemului funcție de caracteristicile sale structurale, precum și de cele ale legăturilor sale cu structura.

Determinarea forțelor dinamice transmise de către mașinile și utilajele tehnologice staționare structurii este utilă în procesul de proiectare a elementelor de legătură (arcuri elastice, amortizoare din cauciuc, etc.), precum și a fundațiilor sau pieselor de susținere.

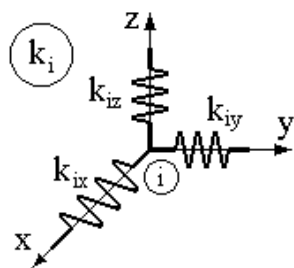


Fig. 1 Legătură elastică triortogonală [1] [3]

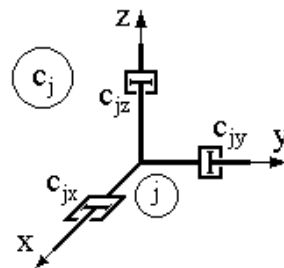


Fig. 2 Legătură vâscoasă triortogonală [1] [3]

Pentru stabilirea mărimii forțelor transmise structurii de către rigidul cu legături vâsco-elastice, se consideră modelul cu n legături elastice și m legături vâscoase [1] [2] [3] [4] [5].

Se consideră că legăturile sunt triortogonale ca în figurile 1 și 2 (în care sunt precizate și caracteristicile elastice și de amortizare după cele trei axe). Se alege un sistem central și principal de axe $Oxyz$; coordonatele generalizate ce descriu pozițiile oricărui punct al rigidului sunt $(X, Y, Z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$. Pentru punctele M_i de coordonate (x_i, y_i, z_i) $i = \overline{1, n}$ față de sistemul local $Oxyz$ în care se găsesc legăturile elastice triortogonale cu rigiditățile $k_i(k_{ix}, k_{iy}, k_{iz})$, deformațiile după cele 3 direcții sunt [6] [7] [8] [9]:

$$\bar{u}_i \begin{cases} u_{ix} = X + z_i \varphi_y - y_i \varphi_z \\ u_{iy} = Y + x_i \varphi_z - z_i \varphi_x \\ u_{iz} = Z + y_i \varphi_x - x_i \varphi_y \end{cases} \quad (1)$$

Forța transmisă structurii prin legătura elastică din punctul M_i are expresia:

$$\bar{F}_i^e = k_{ix} u_{ix} \bar{i} + k_{iy} u_{iy} \bar{j} + k_{iz} u_{iz} \bar{k} \quad (2)$$

Mărimea forței elastice este:

$$F_i^e = \sqrt{(k_{ix} u_{ix})^2 + (k_{iy} u_{iy})^2 + (k_{iz} u_{iz})^2} \quad (3)$$

Pentru punctele N_j de coordonate (x_j, y_j, z_j) $j = \overline{1, m}$ față de sistemul local $Oxyz$ în care se găsesc legăturile vâscoase triortogonale cu coeficienții de amortizare $c_j(c_{jx}, c_{jy}, c_{jz})$, deplasările au expresii similare celor date de (1), iar vitezele de deformație ale elementelor disipative au forma generală [10] [11] [12] [13]:

$$\bar{v}_j \begin{cases} v_{jx} = \dot{X} + z_j \omega_y - y_j \omega_z \\ v_{jy} = \dot{Y} + x_j \omega_z - z_j \omega_x \\ v_{jz} = \dot{Z} + y_j \omega_x - x_j \omega_y \end{cases} \quad (4)$$

În acest caz, forțele transmise structurii prin intermediul elementelor vâscoase au expresiile vectoriale:

$$\bar{F}_j^v = c_{jx}v_{jx}\bar{i} + c_{jy}v_{jy}\bar{j} + c_{jz}v_{jz}\bar{k} \quad (5)$$

Mărimile forțelor vâscoase sunt după cum urmează:

$$F_j^v = \sqrt{(c_{jx}v_{jx})^2 + (c_{jy}v_{jy})^2 + (c_{jz}v_{jz})^2} \quad (6)$$

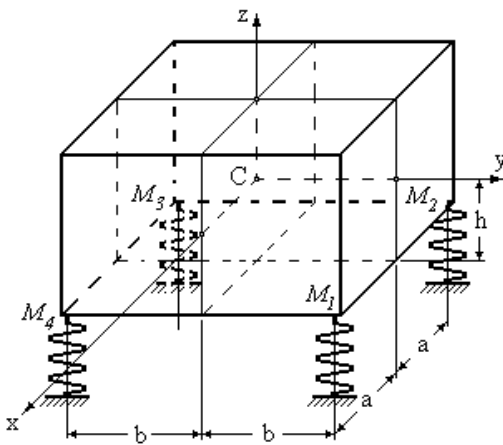


Fig. 3 Solid-rigid cu axă verticală de simetrie [1] [3]

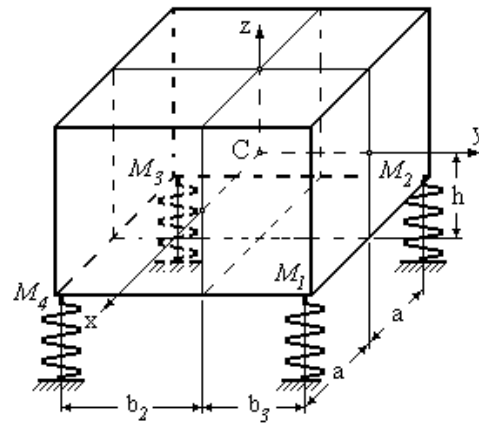


Fig. 4 Solid-rigid cu plan vertical-longitudinal de simetrie [1] [3]

2. FORȚELE DINAMICE TRANSMISE STRUCTURII DE CĂTRE RIGIDUL CU O AXĂ VERTICALĂ DE SIMETRIE

Perturbațiile sau vibrațiile tehnologice care acționează asupra celor mai multe dintre mașinile și utilajele tehnologice sunt de natură inerțială. Deoarece pulsațiile solicitărilor dinamice determinate sunt mult superioare pulsațiilor proprii ale mașinilor, amortizările nu au o influență majoră asupra mărimii amplitudinilor vibrațiilor forțate, astfel încât se poate aprecia că rigidul cu legături elastice este suficient de precis pentru a modela fizic multe dintre mașinile și utilajele staționare din industriile de proces.

Se consideră modelul fizic al unui rigid cu o axă de simetrie verticală rezemat elastic în patru puncte ca în figura 3. Particularizând $h=0$ se obține cazul rigidului rezemat în planul orizontal al centrului de greutate.

În această considerație, coordonatele punctelor de legătură sunt:

$$\begin{aligned} M_1(a, b, 0) \\ M_2(-a, b, 0) \\ M_3(-a, -b, 0) \\ M_4(a, -b, 0) \end{aligned}$$

Vibrațiile forțate ale rigidului cu legături elastice din figura 3 supus unor diverse tipuri de perturbații deterministe sunt armonice, forțele generalizate corespunzătoare solicitărilor dinamice armonice fiind date în tabelul 1 [14] [15], iar expresiile amplitudinilor fiind date în tabelul 2 [16] [17].

Tabelul 1

Perturbație	Vectorul forțelor generalizate perturbatoare
Moment de tangaj (galopare)	$\underline{\underline{f}} = [0, 0, 0, M_{0x}, 0, 0]^T \sin \omega t$
Moment de ruluu (legănare)	$\underline{\underline{f}} = [0, 0, 0, 0, M_{0y}, 0]^T \sin \omega t$
Forță verticală excentrică	$\underline{\underline{f}} = [0, 0, F_{0z}, e_y F_{0z}, -e_{1x} F_{0z}, 0]^T \sin \omega t$
Forță longitudinală excentrică	$\underline{\underline{f}} = [0, F_{0y}, 0, -e_z F_{0y}, 0, e_{2x} F_{0y}]^T \sin \omega t$
Forță înclinată în plan vertical-longitudinal	$\underline{\underline{f}} = [0, F_0 \cos \alpha, F_0 \sin \alpha, e_y^* F_0 \sin \alpha, -e_x F_0 \sin \alpha, e_x F_0 \cos \alpha]^T \sin \omega t$

Tabelul 2

Direcție	Amplitudine
X	$A_X = 0$
Y	$A_Y = \frac{B}{m(p_Y^2 - \omega^2)}$
Z	$A_Z = \frac{C}{m(p_Z^2 - \omega^2)}$
φ_x	$A_{\varphi_x} = \frac{D}{J_x(p_{\varphi_x}^2 - \omega^2)}$
φ_y	$A_{\varphi_y} = \frac{E}{J_y(p_{\varphi_y}^2 - \omega^2)}$
φ_z	$A_{\varphi_z} = \frac{G}{J_z(p_{\varphi_z}^2 - \omega^2)}$

unde: $B = F_{0y} + F_0 \cos \alpha$

$$C = F_{0z} + F_0 \sin \alpha$$

$$D = M_{0x} + e_y F_{0z} - e_z F_{0y} + e_y^* F_0 \sin \alpha$$

$$E = M_{0y} - e_{1x} F_{0z} - e_x F_0 \sin \alpha$$

$$G = e_{2x} F_{0y} + e_x F_0 \cos \alpha$$

Deoarece se presupun legături elastice ale rigidului cu structura, vibrațiile forțate ale acestuia sunt în fază/antifază cu factorii excitatori. Din acest motiv deformațiile triortogonale ale elementelor elastice sunt fazice/antifazice cu perturbațiile. În aceste ipoteze deformațiile legăturilor după cele trei direcții își ating valorile maxime în același momente de timp,

momente în care și forțele elastice din legături sunt maxime. Aceste valori maxime ale forțelor elastice se obțin prin multiplicarea deformațiilor triortogonale ale legăturilor cu rigiditățile corespunzătoare [18].

Pentru tipurile de excitații armonice din tabelul 1 și expresiile amplitudinilor vibrațiilor forțate din tabelul 2, valorile maxime ale forțelor transmise structurii sunt date în tabelul 3.

Tabelul 3

Dir.	Legătură			
	M_1	M_2	M_3	M_4
x	$k_x A_X - bA_{\varphi_z} $	$k_x A_X - bA_{\varphi_z} $	$k_x A_X + bA_{\varphi_z} $	$k_x A_X + bA_{\varphi_z} $
y	$k_y A_Y + aA_{\varphi_z} $	$k_y A_Y - aA_{\varphi_z} $	$k_y A_Y - aA_{\varphi_z} $	$k_y A_Y + aA_{\varphi_z} $
z	$k_z A_Z + bA_{\varphi_x} - aA_{\varphi_y} $	$k_z A_Z + bA_{\varphi_x} + aA_{\varphi_y} $	$k_z A_Z - bA_{\varphi_x} - aA_{\varphi_y} $	$k_z A_Z - bA_{\varphi_x} + aA_{\varphi_y} $

Dacă asupra solidului rigid acționează numai una dintre perturbații, se particularizează relațiile de calcul din tabelul 2 conform expresiilor din tabelul 4.

Tabelul 4

Perturbație armonică	Expresie				
	B	C	D	E	G
Moment perturbator de tangaj $\bar{M} = M_x \bar{i} = (M_{0x} \sin \omega t) \bar{i}$	0	0	M_{0x}	0	0
Moment perturbator de ruluu $\bar{M} = M_y \bar{j} = (M_{0y} \sin \omega t) \bar{j}$	0	0	0	M_{0y}	0
Forță perturbatoare verticală excentrică $\bar{F} = F_z \bar{k} = (F_{0z} \sin \omega t) \bar{k}$	0	F_{0z}	$e_y F_{0z}$	$-e_{1x} F_{0z}$	0
Forță perturbatoare longitudinală excentrică $\bar{F} = F_y \bar{j} = (F_{0y} \sin \omega t) \bar{j}$	F_{0y}	0	$-e_z F_{0y}$	0	$e_{2x} F_{0y}$
Forță perturbatoare înclinată $\bar{F} = (F_0 \cos \alpha \sin \omega t) \bar{j} + (F_0 \sin \alpha \sin \omega t) \bar{k}$	$F_0 \cos \alpha$	$F_0 \sin \alpha$	$e_y^* F_0 \sin \alpha$	$-e_x F_0 \sin \alpha$	$e_x F_0 \cos \alpha$

3. FORȚELE DINAMICE TRANSMISE STRUCTURII DE CĂTRE SOLIDUL CU PLAN VERTICAL-LONGITUDINAL DE SIMETRIE

Pentru solidul-rigid cu un plan de simetrie vertical-longitudinal rezemat elastic în patru puncte ca în figura 4, se particularizează $h=0$, obținându-se o rezemare în planul orizontal al centrului de greutate.

Coordonatele punctelor de legătură sunt:

$$\begin{aligned}
 &M_1(a, b_3, 0) \\
 &M_2(-a, b_3, 0) \\
 &M_3(-a, -b_2, 0) \\
 &M_4(a, -b_2, 0)
 \end{aligned}$$

Vibrațiile forțate ale rigidului cu legături elastice din figura 4 supus unor diverse tipuri de perturbații deterministe sincrone și sinfazice (conf. tabelului 1) sunt armonice, expresiile amplitudinilor fiind date în tabelul 5.

Expresiile analitice ale valorilor maxime ale componentelor forțelor transmise structurii sunt date în tabelul 6.

Tabelul 5

Direcție	Amplitudine
X	$A_X = -\frac{\alpha_2 G}{m(p_1^2 - \omega^2)(p_2^2 - \omega^2)}$
Y	$A_Y = \frac{B}{m(p_5^2 - \omega^2)}$
Z	$A_Z = \frac{(p_{\varphi_x}^2 - \omega^2)C - \beta_2 D}{m(p_3^2 - \omega^2)(p_4^2 - \omega^2)}$
φ_x	$A_{\varphi_x} = \frac{(p_Z^2 - \omega^2)D - \beta_1 C}{J_x(p_3^2 - \omega^2)(p_4^2 - \omega^2)}$
φ_y	$A_{\varphi_y} = \frac{E}{J_y(p_6^2 - \omega^2)}$
φ_z	$A_{\varphi_z} = \frac{(p_X^2 - \omega^2)G}{J_z(p_1^2 - \omega^2)(p_2^2 - \omega^2)}$

unde: $B = F_{0y} + F_0 \cos \alpha$

$C = F_{0z} + F_0 \sin \alpha$

$D = M_{0x} + e_y F_{0z} - e_z F_{0y} + e_y^* F_0 \sin \alpha$

$E = M_{0y} - e_{1x} F_{0z} - e_x F_0 \sin \alpha$

$G = e_{2x} F_{0y} + e_x F_0 \cos \alpha$

Tabelul 6

Dir.	Legătură			
	M_1	M_2	M_3	M_4
x	$k_x A_X - b_3 A_{\varphi_x} $	$k_x A_X - b_3 A_{\varphi_x} $	$k_x A_X + b_2 A_{\varphi_x} $	$k_x A_X + b_2 A_{\varphi_x} $
y	$k_y A_Y + a A_{\varphi_z} $	$k_y A_Y - a A_{\varphi_z} $	$k_y A_Y - a A_{\varphi_z} $	$k_y A_Y + a A_{\varphi_z} $
z	$k_z A_Z + b_3 A_{\varphi_x} - a A_{\varphi_y} $	$k_z A_Z + b_3 A_{\varphi_x} + a A_{\varphi_y} $	$k_z A_Z - b_2 A_{\varphi_x} + a A_{\varphi_y} $	$k_z A_Z - b_2 A_{\varphi_x} - a A_{\varphi_y} $

4. CONCLUZII

- 1) Modelul matematic obținut prin liniarizarea ecuațiilor diferențiale de mișcare și forma armonică a perturbațiilor conduc la vibrații armonice ale rigidului după cele 6 direcții; vibrațiile armonice ale oricărui punct al rigidului rezultă prin compunerea vibrațiilor conform relațiilor (1);
- 2) Datorită modelării elastice a legăturilor rigid-structură, vibrațiile tuturor punctelor sunt fazice/antifazice cu excitațiile armonice, ca de altfel și deformațiile elementelor elastice de susținere;
- 3) Au fost determinate expresiile maxime ale componentelor forțelor transmise structurii pentru cele 2 tipuri de rigid cu simetrii structurale (tabelele 3 și 6); pentru determinarea mărimii maxime a forțelor se folosește relația (3);
- 4) Expresiile componentelor forțelor transmise structurii se pot utiliza în calculul de dimensionare și verificare a elementelor elastice de susținere a mașinilor și utilajelor staționare.

BIBLIOGRAFIE

- [1] **N. Drăgan**, *Contribuții la analiza și optimizarea transportului prin vibrații - teza de doctorat*, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați, 2002
- [2] **P. Bratu**, *Analiza structurilor elastice. Comportarea la acțiuni statice și dinamice*, Ed. Impuls, București, 2011
- [3] **N. Dragan**, *Dinamica transportoarelor vibratoare inerțiale*, Ed. Impuls, București, 2003
- [4] **P. Bratu**, *Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje*, Ed. Tehnică, București, 1990
- [5] **N. Drăgan**, *Les paramètres dynamiques du rigide aux liaisons élastiques excité par des sollicitations déterministes*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [6] **P. Bratu**, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, București, 2000
- [7] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems Dynamics of the Rigid Body with Structural Symmetries. Modal Analysis. Transmitted Forces and Moments*, Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009
- [8] **N. Drăgan**, *Analiza dinamică a solidului rigid cu simetrii structurale rezemat elastic. Studiu de caz – vibrațiile decuplate ale elementelor din beton armat*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 1 (2010) nr. 2, 2010
- [9] **N. Drăgan**, *Analiza dinamică a podurilor din grinzi de beton armat - determinarea modurilor proprii de vibrație*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 9 (2018) nr. 4, 2018

- [10] **P. Bratu, N. Drăgan**, *L'analyse dynamique de l'interaction machine-structure sur la base du modèle équivalent de rigide aux liaisons visco-élastiques*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [11] **P. Bratu, N. Drăgan**, *L'analyse des mouvements désaccouplés appliquée au modèle de solide rigide aux liaisons élastiques*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [12] **N. Drăgan**, *L'analyse des sollicitations dynamiques transmises à la structure par le solide rigide aux liaisons visco-élastiques*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [13] **N. Drăgan**, *Theoretical studies regarding the dynamics of the rigid body with elastic bearings and structural symmetries, excited by harmonical forces and couples*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. VII (XVII), Section Mechanics, 2008
- [14] **N. Drăgan**, *Theoretical researches about dynamic forces transmitted to the structure through viscous-elastic bearings by the rigid body with symmetries*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. VII (XVII), Section Mechanics, 2008
- [15] **N. Drăgan**, *Considerations on the dynamics of the vertical tower chillers with internal axial flow fan*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI), nr. 2, 2012
- [16] **N. Drăgan**, *Modal analysis of the solid rigid with structural symmetries and multiple elastic bearings*, Poster presentation on section "Computational Methods and Mathematical Modeling in Vibration Problems", International Conference on Vibration Problems ICoVP-2011, 5-8 September 2011, Prague, Czech Republic
- [17] **N. Drăgan, C.N. Bordea**, *The Dynamics Analysis of the Forced Steady-state for the Vertical Towers Chillers with Internal Axial Flow Fan*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, 2003
- [18] **N. Drăgan, C.N. Bordea, A. Leopa, D. Anghelache**, *The dynamic of the forced steady-state vibrations for the vertical towers chillers with axial flow fan*, Proceedings of "trans & MOTAUTO'05+" Conference Veliko Tarnovo 23-25 November 2005, vol. 3 "Mechanics, dynamics, strenght and reliability. Theory of machines and mechanisms", ISBN 954-9322-11-4, Sofia 2005