

**DINAMICA SOLIDULUI RIGID 6DOF CU SIMETRII STRUCTURALE
REZEMAT ELASTIC.
ANALIZA VIBRAȚIILOR FORȚATE ÎN REGIM STABILIZAT**

**DYNAMICS OF THE RIGID-BODY 6 DOF WITH STRUCTURAL SYMMETRIES
AND ELASTIC BEARINGS.
THE ANALYSIS OF THE STEADY-STATE VIBRATION**

**Gianina Cornelia SPĂNU (ȘTEFAN)¹, Gigel Florin CĂPĂȚĂNĂ²
Aurora Maria POTÎRNICHE³**

¹Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, Romania, Școala doctorală de Inginerie Mecanică și Industrială
e-mail: spanugianina@yahoo.com

²Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: gcapatana@ugal.ro

³Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: Potarniche.Aurora@ugal.ro

Rezumat: *Articolul prezintă studiul dinamic al unui solid-rigid modelat ca un sistem mecanic cu șase grade de libertate (6DOF), perturbat de diverse tipuri de forțe și cupluri armonice. Considerând diverse tipuri de simetrii structurale, modelul matematic al dinamicii sistemului devine mai simplu, deci mai ușor de studiat. În cazul în care rezemarea elastică este realizată în planul orizontal al centrului de greutate al solidului-rigid, modelul matematic devine și mai simplu, vibrațiile fiind decuplate în subsisteme cu mișcări cuplate.*

Cuvinte cheie: *solid-rigid, 6 grade de libertate dinamică, simetrii structurale, decuplarea mișcărilor, vibrații forțate armonice*

Abstract: *The article proposes a dynamic study of a rigid-body modeled as a 6DOF mechanical system, perturbed by some types of harmonical forces and couples. Some kind of symmetries of the physical model get to a simplified mathematical model, which is more easily to solve. If the solid-body is supported on the foundation by four elastic bearings which make a plane through the center of gravity, the mathematical model becomes still simple and the vibrations are uncoupled.*

Keywords: *solid-body, 6DOF, structural symmetries, decoupled movements, steady-state harmonic vibration*

1. INTRODUCERE. MODELUL SOLIDULUI-RIGID 6DOF

Sistemul ecuațiilor diferențiale de mișcare ale solidului rigid cu legături vâsco-elastice are șase ecuații cuplate elastic și vâsco [1] [2] [3]. Sub formă matricială acest sistem se scrie:

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{B}}\underline{\underline{\dot{q}}} + \underline{\underline{C}}\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}} \quad (1)$$

Considerând solidul-rigid ca având numai legături vâsco-elastice liniare, sistemul de ecuații diferențiale liniare (1) se poate scrie explicit în deplasările $\underline{\underline{q}} = (X, Y, Z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$, legate de axele centrale și principale, prin intermediul matricilor caracteristice [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10]:

► matricea de inerție

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

► matricea de amortizare

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \sum c_{jx} & 0 & 0 & 0 & \sum c_{jxz_j} & -\sum c_{jxy_j} \\ 0 & \sum c_{jy} & 0 & -\sum c_{jyz_j} & 0 & \sum c_{jyx_j} \\ 0 & 0 & \sum c_{jz} & \sum c_{jzy_j} & -\sum c_{jzx_j} & 0 \\ 0 & -\sum c_{jyz_j} & \sum c_{jzy_j} & \sum (c_{jyz_j^2} + c_{jzy_j^2}) & -\sum c_{jzx_j y_j} & -\sum c_{jyx_j z_j} \\ \sum c_{jxz_j} & 0 & -\sum c_{jzx_j} & -\sum c_{jzx_j y_j} & \sum (c_{jzx_j^2} + c_{jxz_j^2}) & -\sum c_{jyx_j z_j} \\ -\sum c_{jxy_j} & \sum c_{jyx_j} & 0 & -\sum c_{jyz_j x_j} & -\sum c_{jxz_j y_j} & \sum (c_{jyx_j^2} + c_{jzy_x_j^2}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

► matricea de rigiditate

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \sum k_{ix} & 0 & 0 & 0 & \sum k_{ixz_i} & -\sum k_{ixy_i} \\ 0 & \sum k_{iy} & 0 & -\sum k_{iyz_i} & 0 & \sum k_{iyx_i} \\ 0 & 0 & \sum k_{iz} & \sum k_{izy_i} & -\sum k_{izx_i} & 0 \\ 0 & -\sum k_{iyz_i} & \sum k_{izy_i} & \sum (k_{iyz_i^2} + k_{izy_i^2}) & -\sum k_{izx_i y_i} & -\sum k_{iyz_i x_i} \\ \sum k_{ixz_i} & 0 & -\sum k_{izx_i} & -\sum k_{izx_i y_i} & \sum (k_{izx_i^2} + k_{ixz_i^2}) & -\sum k_{ixy_i z_i} \\ -\sum k_{ixy_i} & \sum k_{iyx_i} & 0 & -\sum k_{iyz_i x_i} & -\sum k_{ixy_i z_i} & \sum (k_{ixy_i^2} + k_{iyx_i^2}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dacă se consideră că legăturile sunt elastice sau cvasielastice, ecuația diferențială matricială a vibrațiilor forțate ale solidului-rigid se scrie [11] [12] [13] [14]:

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{C}}\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}} \quad (5)$$

Pentru analiza modurilor proprii de vibrație ale solidului-rigid cu legături elastice liniare, ecuația diferențială matricială devine [15] [16] [17] [18]:

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{C}}\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}} \quad (6)$$

Analitic, sistemul matricial (6) se poate scrie [19]:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{X} + X\sum k_{ix} + \varphi_y\sum k_{ix}z_i - \varphi_z\sum k_{ix}y_i = 0 \\ m\ddot{Y} + Y\sum k_{iy} - \varphi_x\sum k_{iy}z_i + \varphi_z\sum k_{iy}x_i = 0 \\ m\ddot{Z} + Z\sum k_{iz} + \varphi_x\sum k_{iz}y_i - \varphi_y\sum k_{iz}x_i = 0 \\ J_x\ddot{\varphi}_x - Y\sum k_{iy}z_i + Z\sum k_{iz}y_i + \varphi_x\sum(k_{iy}z_i^2 + k_{iz}y_i^2) - \varphi_y\sum k_{iz}x_iy_i - \varphi_z\sum k_{iy}z_ix_i = 0 \\ J_y\ddot{\varphi}_y + X\sum k_{ix}z_i - Z\sum k_{iz}x_i - \varphi_x\sum k_{iz}x_iy_i + \varphi_y\sum(k_{iz}x_i^2 + k_{ix}z_i^2) - \varphi_z\sum k_{ix}y_iz_i = 0 \\ J_z\ddot{\varphi}_z - X\sum k_{ix}y_i + Y\sum k_{iy}x_i - \varphi_x\sum k_{iy}z_ix_i - \varphi_y\sum k_{ix}y_iz_i + \varphi_z\sum(k_{ix}y_i^2 + k_{iy}x_i^2) = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

Sistemele (1) (5) (6)/(7) sunt dificil de rezolvat analitic sau folosind formalismul matricial, din următoarele motive:

- volumul de calcule este foarte mare;
- ecuația pulsațiilor proprii este de tip polinomial de ordinul șase;
- expresiile parametrilor dinamici sunt foarte complicate; se evidențiază foarte dificil influența caracteristicilor masice, dimensionale și vâsco-elastice, precum și a factorilor perturbatori (amplitudine, pulsație).

Pentru ușurința abordării și rezolvării analitice a modelului sistemului vibrant se vor impune anumite condiții dimensionale și de structură pentru acesta, care să ducă la decuplarea sistemului de ecuații în subsisteme mai simple și ușor de integrat.

2. MODELUL DINAMIC AL SOLIDULUI-RIGID CU AXĂ VERTICALĂ DE SIMETRIE

Se consideră solidul-rigid cu o axă verticală de simetrie (Cz), rezemat elastic în patru puncte, ca în figura 1. Simetria rigidului constă în simetria de distribuție masică, simetria dimensională și simetria legăturilor (constante elastice, poziționare).

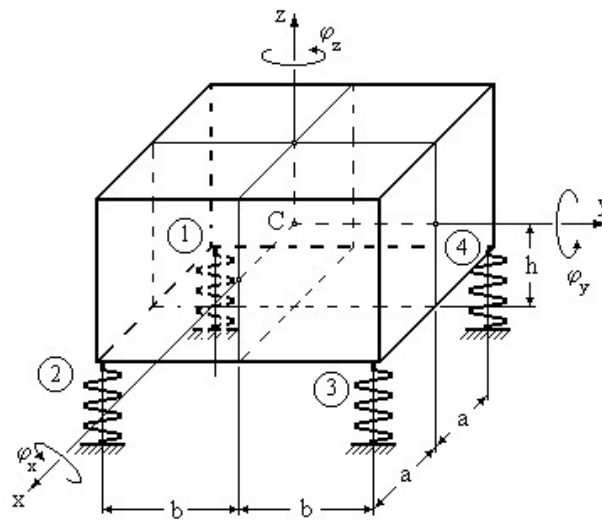


Fig. 1 Modelul solidului-rigid cu axă verticală de simetrie [13] [14]

Datorită simetriilor menționate, în ipoteza poziționării centrului de greutate în planul format de punctele de reazem ($h=0$), termenii de cuplaj din matricea de rigiditate se anulează, aceasta devenind diagonală:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 4k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4b^2k_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a^2k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4(a^2k_y + b^2k_x) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Deoarece axele de coordonate sunt centrale și principale, matricea de inerție este diagonală

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} = \text{DIAG}[m, m, m, J_x, J_y, J_z], \quad (9)$$

mișcările rigidului decuplându-se după cele șase coordonate $X, Y, Z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$.

Pulsățiile proprii ale mișcărilor decuplate sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_X = 2\sqrt{\frac{k_x}{m}} \\ p_2 = p_Y = 2\sqrt{\frac{k_y}{m}} \\ p_3 = p_Z = 2\sqrt{\frac{k_z}{m}} \\ p_4 = p_{\varphi_x} = 2b\sqrt{\frac{k_z}{J_x}} = 2\frac{b}{i_x}\sqrt{\frac{k_z}{m}} \\ p_5 = p_{\varphi_y} = 2a\sqrt{\frac{k_z}{J_y}} = 2\frac{a}{i_y}\sqrt{\frac{k_z}{m}} \\ p_6 = p_{\varphi_z} = 2\sqrt{\frac{a^2k_y + b^2k_x}{J_z}} = 2\frac{1}{i_z}\sqrt{\frac{a^2k_y + b^2k_x}{m}} \end{array} \right. , \quad (10)$$

unde i_x, i_y și i_z sunt razele de inerție axiale ale rigidului.

3. MODELUL DINAMIC AL SOLIDULUI-RIGID CU PLAN VERTICAL LONGITUDINAL DE SIMETRIE

Se consideră rigidul cu un plan vertical-longitudinal de simetrie (yCz) rezemat elastic în patru puncte [19] [20] [21] (figura 2).

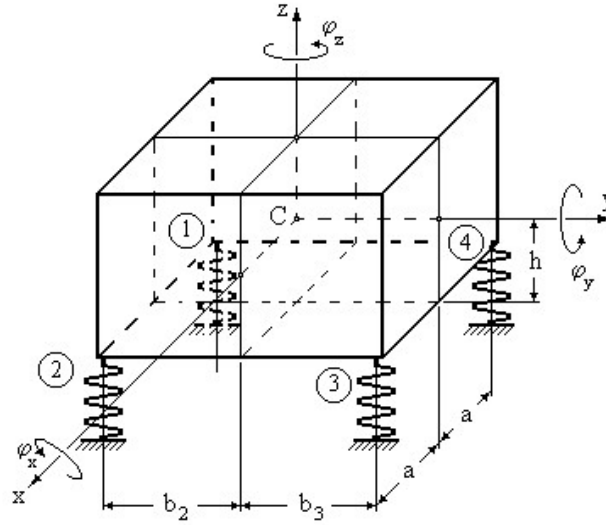


Fig. 2 Modelul solidului-rigid cu plan vertical-longitudinal de simetrie [19]

Considerându-se că rigidul este rezemat într-un plan ce trece prin centrul său de greutate, o parte a termenilor de cuplaj din matricea de rigiditate se anulează; astfel, se obține forma mai simplă a acesteia, după cum urmează:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 4k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_x(b_3 - b_2) \\ 0 & 4k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k_z & 2k_z(b_3 - b_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k_z(b_3 - b_2) & 2k_z(b_2^2 + b_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a^2k_z & 0 \\ -2k_x(b_3 - b_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 2[2a^2k_y + k_x(b_2^2 + b_3^2)] \end{bmatrix} \quad (11)$$

Datorită formei diagonale a matricii de inerție, vibrațiile sistemului se decuplează în patru subsisteme: (X, φ_x) , (Z, φ_z) , (Y) , (φ_y) .

Pentru fiecare subsistem decuplat, pulsațiile proprii corespunzătoare au expresiile analitice după cum urmează:

a) pentru **vibrațiile cuplate de derapare și de girație** (X, φ_x) :

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{I}{2} \left[(p_X^2 + p_{\varphi_x}^2) \mp \sqrt{(p_X^2 - p_{\varphi_x}^2) + 4\alpha_1\alpha_2} \right]}, \quad (12)$$

unde:

$$\alpha_1 = -2 \frac{k_x(b_3 - b_2)}{m} \quad \alpha_2 = -2 \frac{k_x(b_3 - b_2)}{J_z}$$

$$p_X = 2 \sqrt{\frac{k_x}{m}} \quad p_{\varphi_z} = \sqrt{\frac{2[2a^2 k_y + k_x(b_2^2 + b_3^2)]}{J_z}}$$

b) pentru **vibrațiile cuplate de săltare și de galopare** (Z, φ_x):

$$p_{3,4} = \sqrt{\frac{I}{2} \left[(p_Z^2 + p_{\varphi_x}^2) \mp \sqrt{(p_Z^2 - p_{\varphi_x}^2) + 4\beta_1 \beta_2} \right]}, \quad (13)$$

unde:

$$\beta_1 = 2 \frac{k_z(b_3 - b_2)}{m} \quad \beta_2 = 2 \frac{k_z(b_3 - b_2)}{J_x}$$

$$p_Z = 2 \sqrt{\frac{k_z}{m}} \quad p_{\varphi_x} = \sqrt{\frac{2k_z(b_2^2 + b_3^2)}{J_x}}$$

c) pentru **vibrațiile decuplate de înaintare** (Y):

$$p_5 = p_Y = 2 \sqrt{\frac{k_y}{m}} \quad (14)$$

d) pentru **vibrațiile decuplate de legănare** (φ_y):

$$p_6 = p_{\varphi_y} = 2a \sqrt{\frac{k_z}{J_y}} = \frac{a}{i_y} p_Z \quad (15)$$

4. VIBRAȚIILE FORȚATE ALE RIGIDULUI CU SIMETRII. FORȚELE PERTURBATOARE GENERALIZATE

Se consideră că rigidul este supus unor solicitări dinamice deterministe (excitații armonice). Parametrii dinamici ai răspunsului sistemului sunt amplitudinile mișcărilor după cele șase “direcții” deoarece mișcărilor sunt în fază/antifază cu perturbațiile în absența amortizărilor.

Pentru determinarea formei forțelor generalizate corespunzătoare celor 6 coordonate generalizate se consideră modelul fizic din figura 3a). Pentru simplitate, au fost luate în considerație tipurile de perturbații cele mai întâlnite în acționările mașinilor și utilajelor tehnologice:

- forțe excentrice verticale (F_z) și longitudinale (F_y);
- cupluri de tangaj (M_x) și de ruliu (M_y).

În figura 3b) este prezentat modelul solidului-rigid perturbat de o forță înclinată într-un plan vertical-longitudinal (F), deoarece este cazul tipic de acționare a unei clase largi de utilaje cu acțiune vibrantă (alimentatoare, transportoare, ciururi).

Dinamica solidului rigid 6DOF cu simetrii structurale rezemat elastic. Analiza vibrațiilor forțate în regim stabilizat

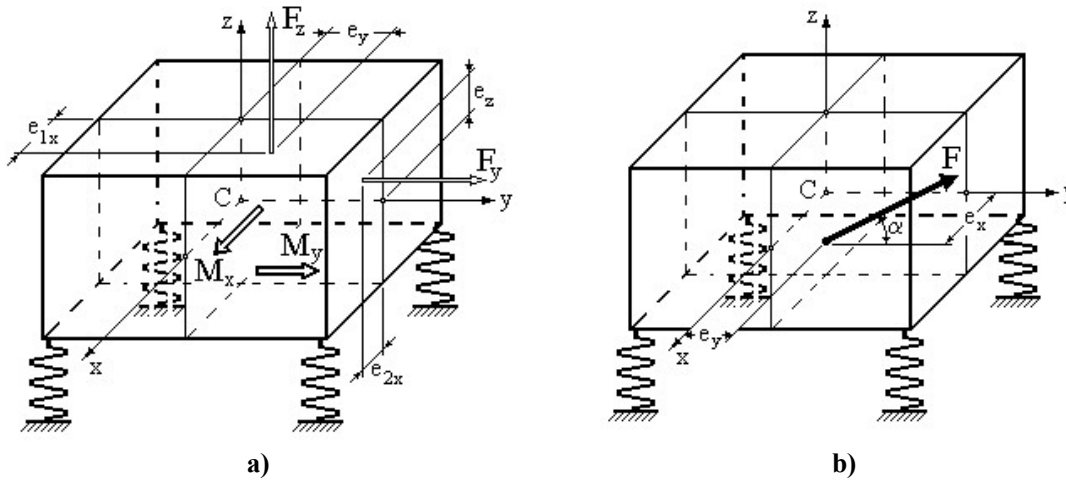


Fig. 3 Tipuri de solicitări dinamice ce acționează asupra solidului-rigid cu simetrii [22] [23]

Pentru determinarea formei forțelor perturbatoare generalizate se consideră pe rând câte o perturbație dintre cele din figurile 3; în cazul în care acționează mai mulți factori perturbatori se consideră că este valabil principiul suprapunerii efectelor, modelul considerat fiind liniar iar perturbațiile sinfazice (în lipsa amortizărilor).

În tabelul 1 sunt date expresiile vectorilor forțelor generalizate corespunzătoare perturbațiilor din figurile 3, unde ω este pulsația perturbațiilor.

Tabelul 1

Perturbație	Vectorul forțelor generalizate perturbatoare
Moment de tangaj (galopare)	$\underline{f}^T = [0, 0, 0, M_{0x} \sin \omega t, 0, 0]$
Moment de ruluu (legănare)	$\underline{f}^T = [0, 0, 0, 0, M_{0y} \sin \omega t, 0]$
Forță verticală excentrică	$\underline{f}^T = [0, 0, F_{0z} \sin \omega t, e_y F_{0z} \sin \omega t, -e_{1x} F_{0z} \sin \omega t, 0]$
Forță longitudinală excentrică	$\underline{f}^T = [0, F_{0y} \sin \omega t, 0, -e_z F_{0y} \sin \omega t, 0, e_{2x} F_{0y} \sin \omega t]$
Forță înclinată în plan vertical-longitudinal	$\underline{f}^T = [0, F_0 \cos \alpha, F_0 \sin \alpha, e_y^* F_0 \sin \alpha, -e_x F_0 \sin \alpha, e_x F_0 \cos \alpha] \sin \omega t$

5. VIBRAȚIILE FORȚATE ALE SOLIDULUI-RIGID CU SIMETRII

Se notează:

$$\begin{cases}
 B = F_{0y} + F_0 \cos \alpha \\
 C = F_{0z} + F_0 \sin \alpha \\
 D = M_{0x} + e_y F_{0z} - e_z F_{0y} + e_y^* F_0 \sin \alpha \\
 E = M_{0y} - e_{1x} F_{0z} - e_x F_0 \sin \alpha \\
 G = e_{2x} F_{0y} + e_x F_0 \cos \alpha
 \end{cases} \quad (16)$$

5.1. Vibrațiile forțate ale solidului-rigid cu axă verticală de simetrie

Deoarece toate cele șase mișcări ale rigidului cu axă verticală de simetrie sunt decuplate (a se vedea considerațiile de la §2), determinarea amplitudinilor vibrațiilor forțate este relativ simplă pentru rigidul cu o axă verticală de simetrie [24] [25]. În tabelul 2 sunt date expresiile amplitudinilor vibrațiilor forțate după cele șase “direcții” în cazul acționării simultan a tuturor celor 5 tipuri de perturbații (sincrone și sinfazice).

Tabelul 2

Direcție	Amplitudine
X	$A_X = 0$
Y	$A_Y = \frac{B}{m(p_Y^2 - \omega^2)}$
Z	$A_Z = \frac{C}{m(p_Z^2 - \omega^2)}$
φ_x	$A_{\varphi_x} = \frac{D}{J_x(p_{\varphi_x}^2 - \omega^2)}$
φ_y	$A_{\varphi_y} = \frac{E}{J_y(p_{\varphi_y}^2 - \omega^2)}$
φ_z	$A_{\varphi_z} = \frac{G}{J_z(p_{\varphi_z}^2 - \omega^2)}$

Tabelul 3

Direcție	Amplitudine
X	$A_X = -\frac{\alpha_2 G}{m(p_1^2 - \omega^2)(p_2^2 - \omega^2)}$
Y	$A_Y = \frac{B}{m(p_5^2 - \omega^2)}$
Z	$A_Z = \frac{(p_{\varphi_x}^2 - \omega^2)C - \beta_2 D}{m(p_3^2 - \omega^2)(p_4^2 - \omega^2)}$
φ_x	$A_{\varphi_x} = \frac{(p_Z^2 - \omega^2)D - \beta_1 C}{J_x(p_3^2 - \omega^2)(p_4^2 - \omega^2)}$
φ_y	$A_{\varphi_y} = \frac{E}{J_y(p_6^2 - \omega^2)}$
φ_z	$A_{\varphi_z} = \frac{(p_X^2 - \omega^2)G}{J_z(p_1^2 - \omega^2)(p_2^2 - \omega^2)}$

5.2. Vibrațiile forțate ale solidului-rigid cu plan vertical de simetrie

Ecuțiile diferențiale ale vibrațiilor forțate sunt:

a) pentru vibrațiile cuplate de derapare și de girație (X, φ_z):

$$\begin{cases} m\ddot{X} + 4k_x X - 2k_x(b_3 - b_2)\varphi_z = 0 \\ J_z\ddot{\varphi}_z - 2k_x(b_3 - b_2)X + 2[2a^2k_y + k_x(b_2^2 + b_3^2)]\varphi_z = G \end{cases} \quad (17)$$

b) pentru vibrațiile cuplate de săltare și de galopare (Z, φ_x):

$$\begin{cases} m\ddot{Z} + 4k_z Z + 2k_z(b_3 - b_2)\varphi_x = C \\ J_x\ddot{\varphi}_x + 2k_z(b_3 - b_2)Z + 2k_z(b_2^2 + b_3^2)\varphi_x = D \end{cases} \quad (18)$$

c) pentru vibrațiile decuplate de înaintare (Y):

$$m\ddot{Y} + 4k_y Y = B \quad (19)$$

d) pentru vibrațiile decuplate de legănare (φ_y):

$$J_y \ddot{\varphi}_y + 4a^2 k_z \varphi_y = E \quad (20)$$

Amplitudinile vibrațiilor forțate ale rigidului cu simetrie după planul vertical longitudinal sunt date în tabelul 3, unde p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 și p_6 sunt pulsațiile proprii ale mișcărilor subsistemelor decuplate (cu mișcări cuplate), iar $p_X, p_Y, p_Z, p_{\varphi_x}, p_{\varphi_y}$ și p_{φ_z} sunt pulsațiile proprii ale mișcărilor necuplate.

6. CONCLUZII

În multe situații practice, mașinile și utilajele folosite în diverse fluxuri tehnologice au diverse particularități referitoare la simetriile dimensionale, masice și de rezemare după plane verticale. Modelarea și studiul modelelor cu simetrie sunt facilitate prin simplificarea matricii de rigiditate, care duce la decuplarea ecuațiilor diferențiale de mișcare în subsisteme mai simple de rezolvat pe cale analitică. Cu cât simetria este mai pronunțată, cu atât decuplarea se face în subsisteme mai simple; în plus, dacă rezemarea se face în planul orizontal al centrului de masă al rigidului au decuplări mai evidente ale mișcărilor rigidului, ce pot conduce la șase vibrații independente după cele șase direcții considerate.

Studiul conduce la obținerea unor relații analitice ce pun în evidență influența diverșilor parametri asupra formei modurilor proprii de vibrație (pulsații proprii, vectori proprii), cât și asupra parametrilor dinamici ai vibrațiilor forțate; aceste relații pot fi folosite în faza de proiectare pentru optimizarea parametrilor tehnologici la mașinile cu acțiune vibrantă sau pentru reducerea nivelului de vibrații dăunătoare transmise diverselor subansamble ale mașinii, precum și mediului prin intermediul suporturilor de sprijin sau fundației.

BIBLIOGRAFIE

- [1] **P. Bratu**, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, București, 2000
- [2] **P. Bratu**, *Analiza structurilor elastice. Comportarea la acțiuni statice și dinamice*, Ed. Impuls, București, 2011
- [3] **P. Bratu, N. Drăgan**, *Vibrații mecanice. Aplicații*, Ed. Impuls, București, 1998
- [4] **N. Drăgan**, *Contribuții la analiza și optimizarea transportului prin vibrații - teza de doctorat*, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați, 2002
- [5] **P. Bratu**, *Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje*, Ed. Tehnică, București, 1990
- [6] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems Dynamics of the Rigid Body with Structural Symmetries. Modal Analysis. Transmitted Forces and Moments*, Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009
- [7] **N. Dragan**, *Modal calculus of the reinforced concrete bridges modeled as a rigid solid beared on viscous elastic neoprene supports*, The Annals of "Dunărea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVI, 2010
- [8] **N. Dragan**, *Dinamica transportoarelor vibratoare inerțiale*, Ed. Impuls, București, 2003
- [9] **L. Sakalauskas, N. Dragan, O. Vasile**, *Studies concerning the optimization of the modal analysis of the Bechtel's viaducts – calculus of natural frequencies and eigenvalues*, Romanian Journal of Acoustics and Vibration, Volume VIII, Issue 1, 2011

- [10] **N. Dragan, I. Dzemyda**, *The innovative concept of dynamic analysis for the movements of the viaduct modeled as solid body with elastic bearings*, Romanian Journal of Acoustics and Vibration, Volume VIII, Issue 1, 2011
- [11] **N. Drăgan**, *Analiza dinamică a solidului rigid cu simetrii structurale rezemat elastic. Studiu de caz – vibrațiile decuplate ale elementelor din beton armat*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 1 (2010) nr. 2, 2010
- [12] **N. Drăgan**, *Analiza dinamică a podurilor din grinzi de beton armat - determinarea modurilor proprii de vibrație*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 9 (2018) nr. 4, 2018
- [13] **P. Bratu, N. Drăgan**, *L'analyse dynamique de l'interaction machine-structure sur la base du modèle équivalent de rigide aux liaisons visco-élastiques*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [14] **P. Bratu, N. Drăgan**, *L'analyse des mouvements désaccouplés appliquée au modèle de solide rigide aux liaisons élastiques*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [15] **N. Drăgan**, *Theoretical studies regarding the dynamics of the rigid body with elastic bearings and structural symmetries, excited by harmonical forces and couples*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. VII (XVII), Section Mechanics, 2008
- [16] **N. Drăgan**, *Theoretical researches about dynamic forces transmitted to the structure through viscous-elastic bearings by the rigid body with symmetries*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. VII (XVII), Section Mechanics, 2008
- [17] **N. Drăgan**, *Some considerations about the dynamics of the reinforced concrete bridges modeled as a rigid solid with viscous-elastic bearings*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. IX (XIX), nr. 3, 2010
- [18] **N. Drăgan**, *Considerations on the dynamics of the vertical tower chillers with internal axial flow fan*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI), nr. 2, 2012
- [19] **N. Drăgan**, *Modal analysis of the solid rigid with structural symmetries and multiple elastic bearings*, Poster presentation on section "Computational Methods and Mathematical Modeling in Vibration Problems", International Conference on Vibration Problems ICoVP-2011, 5-8 September 2011, Prague, Czech Republic
- [20] **N. Dragan**, *Aspects regarding the dynamics of the vibrating conveyors modeled as 3DOF elastic systems*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVIII, 2012
- [21] **N. Dragan**, *The dynamic analysis of the inertial vibrating screens modeled as 3DOF elastic systems*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVIII, 2012
- [22] **N. Drăgan**, *Les paramètres dynamiques du rigide aux liaisons élastiques excité par des sollicitations déterministes*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [23] **N. Drăgan**, *L'analyse des sollicitations dynamiques transmises à la structure par le solide rigide aux liaisons visco-élastiques*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [24] **N. Drăgan, C.N. Bordea**, *The Dynamics Analysis of the Forced Steady-state for the Vertical Towers Chillers with Internal Axial Flow Fan*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, 2003
- [25] **N. Drăgan, C.N. Bordea, A. Leopa, D. Anghelache**, *The dynamic of the forced steady-state vibrations for the vertical towers chillers with axial flow fan*, Proceedings of "trans & MOTAUTO'05+" Conference Veliko Tarnovo 23-25 November 2005, vol. 3 "Mechanics, dynamics, strenght and reliability. Theory of machines and mechanisms", ISBN 954-9322-11-4, Sofia 2005