

CALCULUL RIGIDITĂȚILOR ECHIVALENTE ÎN SISTEMELE DE TRANSMISIE CU ARBORI ELASTICI - (CAZUL REAL $\eta \neq 0$)

THE EQUIVALENT STIFFNESS CALCULUS IN THE ELASTIC DRIVESHAFTS TRANSMISSION SYSTEMS - (REAL CASE $\eta \neq 0$)

Gigel Florin CĂPĂȚĂNĂ¹, Aurora Maria POTÎRNICHE²
Gianina Cornelia SPÂNU (ȘTEFAN)³

¹Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: gcapatana@ugal.ro

²Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: Potarniche.Aurora@ugal.ro

³Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, Romania - Școala doctorală de Inginerie Mecanică și Industrială
e-mail: spanugianina@yahoo.com

Rezumat: *Articolul prezintă metoda de calcul a rigidităților echivalente ale elementelor de transmitere a mișcării de tip arbore. Metoda ține seama atât de rapoartele de transmitere a mișcării prin intermediul angrenajelor fără alunecare (de tip angrenaje cu roți dințate) dar și de pierderile energetice mecanice din acestea cuantificate prin intermediul randamentelor mecanice h . Pentru exemplificarea metodei de echivalare se consideră un studiu de caz al unei transmisii mecanice ramificate cu arbori elastici și angrenaje cu roți dințate.*

Cuvinte cheie: *sisteme mecanice elastice reale, rigiditate echivalentă, angrenaje cu roți dințate, transmisii mecanice ramificate*

Abstract: *The article presents the calculus method of the equivalent rigidities of the transmission with elastic shaft. The method takes into account both the transmission ratio of gears and the mechanical energy losses quantified through mechanical efficiency η . To exemplify the calculus method, a case study of a branched mechanical transmission with elastic shafts and gears is considered.*

Keywords: *real mechanic elastical systems, equivalent rigidity, gearing, forked mechanical transmission*

1. INTRODUCERE

Elementele componente ale utilajelor tehnologice sunt caracterizate printr-o anumită rigiditate (sau elasticitate). Cunoașterea rigidității permite ca, pentru anumite regimuri dinamice variabile și diverse, să se poată evalua solicitările dinamice torsionale până la determinarea tensiunilor din arborii elastici [1] [2] [3]. Rigiditatea este un factor determinant în evaluarea solicitărilor dinamice și trebuie să fie luată în calcul pentru elementele elastice ale echipamentelor mecanice (arbori, cuplaje, roți dințate, organele de lucru, etc.) [4] [5] [6].

Coeficientul de rigiditate redus corespunde unui element elastic echivalent care înlocuiește sistemul elastic real, pe baza echivalenței energiilor potențiale de deformație. Astfel, energia potențială de deformație a elementului elastic redus V_r este egală cu energia potențială de deformație V a elementului elastic real, din configurația sistemului material dat [7] [8].

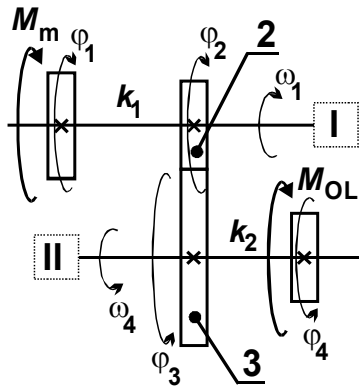


Fig. 1 Sistem de transmitere cu transformare a mișcării

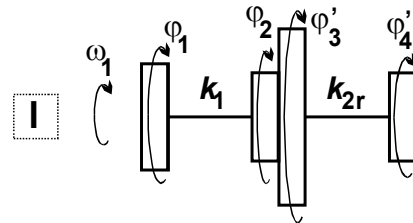


Fig. 2 Sistem echivalent/reduc la arborele motor I (cu viteza unghiulară ω_1)

2. CALCULUL COEFICIENȚILOR DE RIGIDITATE ECHIVALENȚI LA ARBORELE MOTOR I

Pentru analiza modului de reducere a rigidităților elementelor elastice de tip arbore solicitat la torsiune, se consideră sistemul din *figura 1*, alcătuit din doi arbori (I și II) și o transmisie într-o singură treaptă [9]. Se consideră că raportul de transmitere de la arborele motor I la arborele organului de lucru II este i și randamentul mecanic al angrenajului cu roți dințate este η [10] [11].

Schema de calcul echivalentă este prezentată în *figura 2*, unde rotațiile capătelor arborelui II corespunzătoare reducerii rigidității acestuia la k_{2r} sunt φ'_3 și φ'_4 (rotațiile reale sunt φ_1 , φ_2 , φ_3 și φ_4 , conform *figurii 1*).

Se consideră că în sistemul real momentul elastic de torsiune din arborele II este egal cu momentul de rezistență la organul de lucru:

$$M_{OL} = k_2(\varphi_3 - \varphi_4) \quad (1)$$

Pentru sistemul echivalent, momentul rezistent redus este egal cu momentul elastic de torsiune calculat cu coeficientul de rigiditate redus și cu unghiurile corespunzătoare operației de reducere:

$$M_{OLr} = k_{2r}(\varphi'_3 - \varphi'_4) \quad (2)$$

Prin echivalarea energiilor potențiale de deformație

$$V = \frac{1}{2}k_2(\varphi_3 - \varphi_4)^2 \quad (3)$$

$$V_r = \frac{1}{2}k_{2r}(\varphi'_3 - \varphi'_4)^2, \quad (4)$$

Calculul rigidităților echivalente în sistemele de transmisie cu arbori elastici
- (cazul real $\eta \neq 0$)

se poate scrie raportul rigidităților după cum urmează:

$$\frac{k_2}{k_{2r}} = \frac{(\varphi'_3 - \varphi'_4)^2}{(\varphi_3 - \varphi_4)^2} \quad (5)$$

Din relațiile (3) și (4), raportul rotirilor relative se poate scrie astfel:

$$\frac{\varphi'_3 - \varphi'_4}{\varphi_3 - \varphi_4} = \frac{k_2}{k_{2r}} \frac{M_{OLr}}{M_{OL}} \quad (6)$$

Pentru stabilirea expresiei rigidității reduse a arborelui II, se scrie balanța de puteri pentru determinarea cuplului redus rezistent [12].

2.1. Cazul ideal - neglijarea pierderilor de putere din angrenaj ($\eta = 1$) [13]

$$M_{OLr} \omega_1 = M_{OL} \omega_2 \Rightarrow \frac{M_{OLr}}{M_{OL}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{i} \quad (7)$$

Dacă se introduce în relația (5) expresia raportului cuplurilor rezistente dat de (7) și expresia raportului unghiurilor relative dat de (6), se obține rigiditatea redusă după cum urmează:

$$\frac{k_2}{k_{2r}} = \left(\frac{k_2}{k_{2r}} \right)^2 \frac{1}{i^2} \Rightarrow k_{2r} = \frac{k_2}{i^2} \quad (8)$$

2.2. Cazul real - luarea în calcul a randamentului angrenajului ($\eta < 1$) [14] [15]

$$M_{OLr} \omega_1 \eta = M_{OL} \omega_2 \Rightarrow \frac{M_{OLr}}{M_{OL}} = \frac{\omega_2}{\omega_1 \eta} = \frac{1}{i \eta} \quad (9)$$

Dacă se introduce în relația (5) expresia raportului cuplurilor rezistente dat de (9) și expresia raportului unghiurilor relative dat de (6), se obține rigiditatea redusă după cum urmează:

$$\frac{k_2}{k_{2r}} = \left(\frac{k_2}{k_{2r}} \right)^2 \frac{1}{i^2 \eta^2} \Rightarrow k_{2r} = \frac{k_2}{i^2 \eta^2} \quad (10)$$

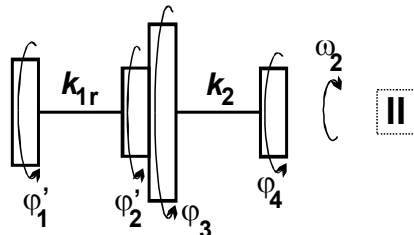


Fig. 3 Sistem echivalent/reduș la arborele organului de lucru II (cu viteza unghiulară ω_2)

3. CALCULUL COEFICIENȚILOR DE RIGIDITATE ECHIVALENȚI LA ARBORELE ORGANULUI DE LUCRU II

Schema de calcul echivalentă este prezentată în *figura 3*, unde rotirile capătelor arborelui **I** corespunzătoare reducerii rigidității acestuia la k_{lr} sunt φ_1' și φ_2' .

În mod similar reducerii la arborele motor **I**, se consideră că momentele cuplurilor motoare (real și redus) sunt egale cu momentele elastice de torsiune din arborele elastic **I** corespunzătoare celor două rotiri relative $\varphi_1-\varphi_2$ și $\varphi_1'-\varphi_2'$. Astfel, se poate scrie:

$$M_m = k_I(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (11)$$

$$M_{mr} = k_{lr}(\varphi_1' - \varphi_2') \quad (12)$$

Prin echivalarea energiilor potențiale de deformație V și V_r ale arborelui **I**

$$V = \frac{1}{2}k_I(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \quad (13)$$

$$V_r = \frac{1}{2}k_{lr}(\varphi_1' - \varphi_2')^2, \quad (14)$$

se poate scrie raportul rigidităților după cum urmează:

$$\frac{k_I}{k_{lr}} = \frac{(\varphi_1' - \varphi_2')^2}{(\varphi_1 - \varphi_2)^2} \quad (15)$$

Din (11) și (12), raportul rotirilor relative se poate scrie:

$$\frac{\varphi_1' - \varphi_2'}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{k_I}{k_{lr}} \frac{M_{mr}}{M_m} \quad (16)$$

Din balanța de puteri, se pot determina rapoartele cuplurilor motoare în cele două cazuri considerate (cazul ideal $\eta=1$ și cazul real $\eta<1$) [16] [17].

3.1.Cazul ideal - neglijarea pierderilor de putere din angrenaj ($\eta=1$)

$$M_m \omega_1 = M_{mr} \omega_2 \Rightarrow \frac{M_{mr}}{M_m} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i \quad (17)$$

$$\frac{k_I}{k_{lr}} = \left(\frac{k_I}{k_{lr}} \right)^2 i^2 \Rightarrow k_{lr} = k_I i^2 \quad (18)$$

3.2.Cazul real - neglijarea pierderilor de putere din angrenaj ($\eta<1$)

$$M_m \omega_1 = M_{mr} \eta \omega_2 \Rightarrow \frac{M_{mr}}{M_m} = \frac{\omega_1}{\omega_2 \eta} = \frac{i}{\eta} \quad (19)$$

Calculul rigidităților echivalente în sistemele de transmisie cu arbori elastici
- (cazul real $\eta \neq 0$)

$$\frac{k_I}{k_{Ir}} = \left(\frac{k_I}{k_{Ir}} \right)^2 \frac{i^2}{\eta^2} \Rightarrow k_{Ir} = k_I \frac{i^2}{\eta^2} \quad (20)$$

4. STUDIU DE CAZ 1. CALCULUL CONSTANTELOR ELASTICE ECHIVALENTE PENTRU UN ECHIPAMENT TRANSPORTOR CU BANDĂ

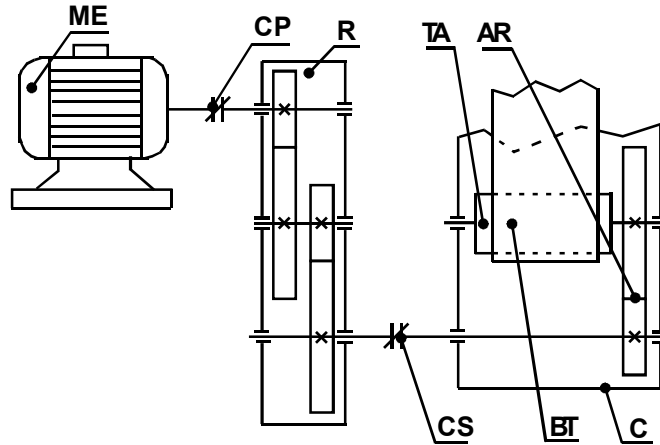


Fig. 4 Sistem de antrenare transportor cu bandă - schema cinematică [1]

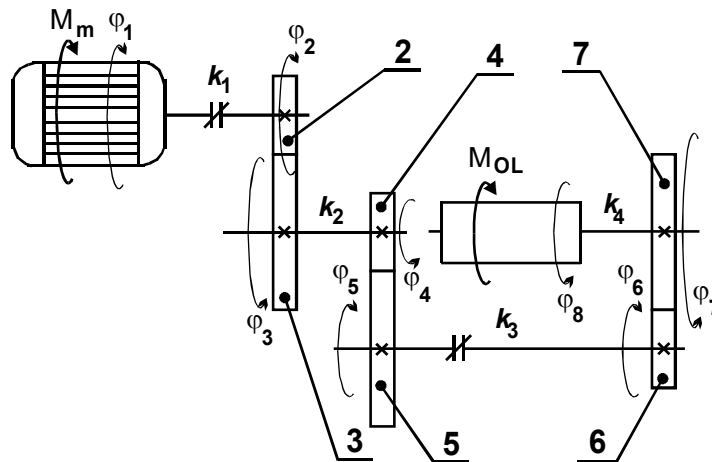


Fig. 5 Sistem de antrenare transportor cu bandă - model dinamic [1]

Se consideră transportorul cu bandă din *figura 4*, care este modelat dinamic ca în *figura 5*, schema lanțului de transmitere a mișcării de la motor la banda transportoare coținând roți dințate (2, 3, 4, 5, 6, 7) și arbori elastici (de rigidități k_1, k_2, k_3, k_4), rotirile elementelor sistemului fiind notate cu φ_i $i = \overline{1,8}$. rapoartele de transmitere și randamentele mecanice ale celor trei trepte de reducere sunt cunoscute:

- angrenajul 2-3 i_1, η_1
- angrenajul 4-5 i_2, η_2
- angrenajul 6-7 i_3, η_3

4.1. Constantele elastice echivalente la arborele motor

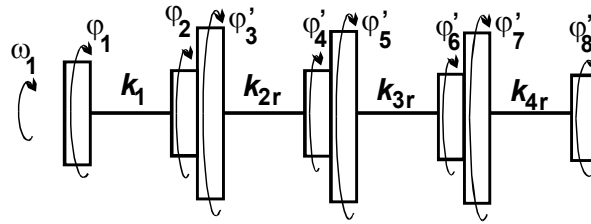


Fig. 6 Sistem echivalent/reduc la arborele motor (viteza unghiulară ω_1)

În figura 6 este prezentat sistemul elastic redus la arborele motor iar în tabelul 1 sunt trecute expresiile de calcul ale constantelor elastice echivalente. Se observă că, în cazul în care se iau în considerare pierderile din angrenaje prin intermediul randamentelor mecanice, constantele elastice echivalente au valori mai mari decât în cazul ideal ($\eta=1$); în acest fel, arborii de transmitere a mișcării sunt mai rigizi, în regim dinamic valorile pulsațiilor proprii fiind mai ridicate [18].

4.2. Constantele elastice echivalente la arborele motor

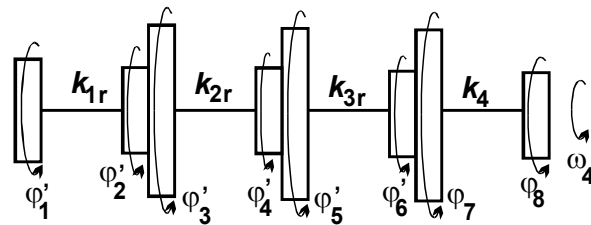


Fig. 7 Sistem echivalent/reduc la arborele organului de lucru (viteza unghiulară ω_4)

În figura 7 este prezentat sistemul elastic redus la arborele organului de lucru iar în tabelul 2 sunt trecute expresiile de calcul ale constantelor elastice echivalente. Ca și în cazul reducerii la arborele motorului de antrenare, constantele elastice echivalente au valori mai mari dacă se iau în considerare randamentele mecanice ($\eta < 1$).

Tabel 1

Constanta elastică echivalentă	
Cazul ideal $\eta=1$	Cazul real $\eta < 1$
$k_{2r} = \frac{k_2}{i_1^2}$	$k_{2r} = \frac{k_2}{i_1^2 \eta_1^2}$
$k_{3r} = \frac{k_3}{i_1^2 i_2^2}$	$k_{3r} = \frac{k_3}{i_1^2 i_2^2 \eta_1^2 \eta_2^2}$
$k_{4r} = \frac{k_4}{i_1^2 i_2^2 i_3^2}$	$k_{4r} = \frac{k_4}{i_1^2 i_2^2 i_3^2 \eta_1^2 \eta_2^2 \eta_3^2}$

Tabel 2

Constanta elastică echivalentă	
Cazul ideal $\eta=1$	Cazul real $\eta < 1$
$k_{3r} = k_3 i_3^2$	$k_{3r} = k_3 \frac{i_3^2}{\eta_3^2}$
$k_{2r} = k_2 i_3^2 i_2^2$	$k_{2r} = k_2 \frac{i_3^2 i_2^2}{\eta_3^2 \eta_2^2}$
$k_{1r} = k_1 i_3^2 i_2^2 i_1^2$	$k_{1r} = k_1 \frac{i_3^2 i_2^2 i_1^2}{\eta_3^2 \eta_2^2 \eta_1^2}$

5. STUDIU DE CAZ 2. CONSTANTELE ELASTICE ECHIVALENTE PENTRU SISTEME DE TRANSMITERE A MIȘCĂRII CU RAMIFICAȚII

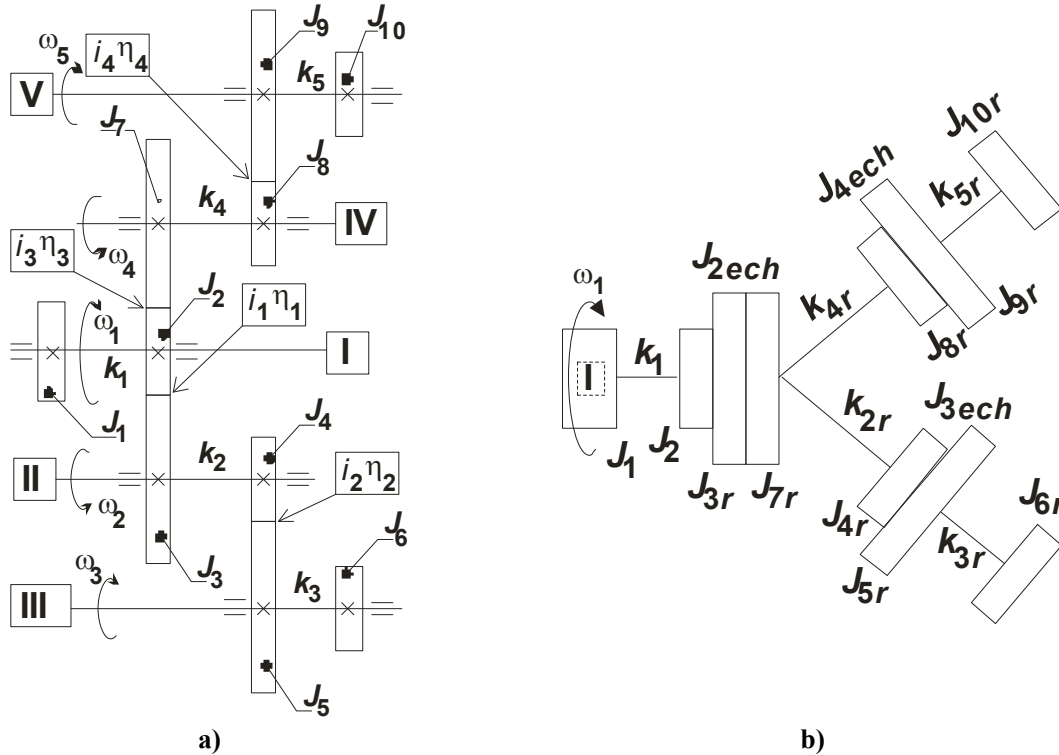


Fig. 8 Sistem de transmitere și transformare a mișcării cu ramificație

Se consideră transmisia din figura 8a cu ramificație la roata 2, fluxul energetic transmițându-se de la arborele motor I către cele două organe de lucru situate pe arborii III și V. Cunoscându-se caracteristicile elementelor transmisiei, se face reducerea la arborele motor, în figura 8b fiind schema de calcul echivalentă. Expresiile analitice ale rigidităților echivalente sunt trecute în tabelul 3.

Tabel 3

Cazul ideal $\eta=1$	$k_{2r} = \frac{k_2}{i_1^2}$	$k_{3r} = \frac{k_3}{i_1^2 i_2^2}$	$k_{4r} = \frac{k_4}{i_3^2}$	$k_{5r} = \frac{k_5}{i_3^2 i_4^2}$
Cazul real $\eta < 1$	$k_{2r} = \frac{k_2}{i_1^2 \eta_1^2}$	$k_{3r} = \frac{k_3}{i_1^2 i_2^2 \eta_1^2 \eta_2^2}$	$k_{4r} = \frac{k_4}{i_3^2 \eta_3^2}$	$k_{5r} = \frac{k_5}{i_3^2 i_4^2 \eta_3^2 \eta_4^2}$

6. CONCLUZII

Metodele de calcul și expresiile analitice obținute pentru rigiditățile echivalente ale arborilor elastici din sistemele de transmitere și transformare ale mișcării sunt utile în studiile dinamice ale sistemelor mecanice elastice nDOF (analiză modală, răspuns dinamic în regim forțat), precum și în calculele ingineresti de verificare și dimensionare.

BIBLIOGRAFIE

- [1] **G.F. Căpățână, A.M. Potîrniche, G.C. Spînu (Ștefan)**, *Analiza dinamică a sistemelor de transmisie cu arbori elastici - calculul rigidităților echivalente (cazul ideal $\eta=0$)*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 10 (2019) nr. 2, 2019
- [2] **A.M. Potîrniche, G.C. Spînu (Ștefan), G.F. Căpățână**, *Analiza dinamică a sistemelor mecanice de transmitere cu arbori elastici. Determinarea momentelor de torsiune echivalente*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 10 (2019) nr. 1, 2019
- [3] **N. Drăgan.**, *Calculul solicitărilor dinamice echivalente în sistemele mecanice de transmitere a mișcării cu arbori elastici*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 10 (2019) nr. 1, 2019
- [4] **N. Drăgan**, *Analiza dinamică a echipamentelor cu arbori elastici*, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie din Brăila, 2006
- [5] **N. Drăgan**, *Dinamica mașinilor (CD)*, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie din Brăila, 2007
- [6] **N. Drăgan.**, *The dynamic analysis of the mechanical systems. Calculus of the equivalent dynamic forces and torques*, The Annals of “Dunărea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2008
- [7] **N. Drăgan., A.M. Potîrniche**, *The calculus of the equivalent rigidity coefficients for the shafts of the elastical systems*, The Annals of “Dunărea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2008
- [8] **N. Drăgan.**, *Dynamic calculation of the mechanical transmissions with gears and elastic shafts*, The Annals of “Dunărea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 1 Issue XVII, ISSN 1224-5615, Galați, 2011
- [9] **M.I. Chiriță, N. Drăgan**, *Analiza dinamică a sistemelor de transmisii cu arbori elastici - calculul solicitărilor dinamice echivalente*, Buletinul celui de-al XXIV-lea Simpozion național de utilaje pentru construcții SINUC 2018 (CD), ISSN 2285-9209, ISSN L 2285-9209, Universitatea Tehnică de Construcții, București, 8 iunie 2018
- [10] **N. Drăgan**, *The analysis of the axial springs' weight influence on the resonance characteristic of the elastical mechanical systems*, The Annals of “Dunărea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2006
- [11] **N. Drăgan**, *The analysis of the torsional springs' inertia influence on the resonance characteristic of the elastical mechanical systems*, The Annals of “Dunărea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2006
- [12] **C. Constatin, N. Drăgan.**, *Analiza dinamică a sistemelor de transmisii cu arbori elastici - calculul rigidităților echivalente*, Buletinul celui de-al XXIV-lea Simpozion național de utilaje pentru construcții SINUC 2018 (CD), ISSN 2285-9209, ISSN L 2285-9209, Universitatea Tehnică de Construcții, București, 8 iunie 2018
- [13] **G. Axinti, N. Drăgan, C.N. Bordea**, *Elemente de mecanică analitică cu aplicații în mecanica tehnică*, ISBN 973-8132-32-0, Editura Impuls, București, 2002
- [14] **C.N. Debeleac, N. Drăgan**, *The dynamic modelling of the mechanical systems. Calculus of the equivalent mass and equivalent mass inertia*, The Annals of “Dunărea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, Galati, 2007
- [15] **C.N. Debeleac, N. Drăgan.**, *The analysis of the bending springs' weight influence on the resonance characteristic of the elastical mechanical systems*, The Annals of “Dunărea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2007
- [16] **N. Drăgan.**, *The analysis of the influence of distributed mass of the springs on the resonance of the elastical mechanical systems*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI) NR1, ISSN 1583-0691, 2012
- [17] **N. Drăgan.**, *Considerations on the influence of distributed mass of the bending springs on the resonance of the IDOF elastical mechanical systems*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI) NR2, ISSN 1583-0691, 2012
- [18] **P.P. Bratu, N. Drăgan**, *Vibrații mecanice. Aplicații*, ISBN 973-98409-8-1, Editura Impuls, București, 1998