

## ANALIZA COMPARATIVĂ A PARAMETRILOR DINAMICI AI SISTEMELOR MECANICE 1DOF CU REAZEME ELASTICE CU COMPORTAMENT REOLOGIC COMPLEX

### COMPARATIVE ANALYSIS OF THE DYNAMIC PARAMETERS OF MECHANICAL SYSTEMS 1DOF WITH COMPLEX RHEOLOGICAL BEHAVIOR ELASTOMERIC BEARINGS

Gianina Cornelia SPÂNU (ȘTEFAN)<sup>1,2</sup>, Gigel Florin CĂPĂȚÂNĂ<sup>3</sup>  
Aurora Maria POTÎRNICHE<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomiedin Brăila, Romania, Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice -MECMET

<sup>2</sup>Școala doctorală de Inginerie Mecanică și Industrială  
e-mail: spanugianina@yahoo.com

<sup>3</sup>Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomiedin Brăila, Romania, Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice -MECMET  
e-mail: gcapatana@ugal.ro

<sup>4</sup>Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomiedin Brăila, Romania, Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice -MECMET  
e-mail: Potarniche.Aurora@ugal.ro

**Rezumat:** *Articolul prezintă comparativ parametrii dinamici ai unui sistem mecanic elastic cu un grad de libertate cu elemente de rezemare elastomerică. Modelele reologice ale elementelor vâscoelastice sunt: Maxwell, Voigt-Kelvin și Zener. Parametrii de analiză dinamică sunt amplitudinea vibrațiilor armonice staționare, factorul de amplificare dinamică și factorul de transmisibilitate a forței dinamice la fundație.*

**Cuvinte cheie:** *parametri dinamici, sistem mecanic elastic 1DOF, reazeme elastomerică, modele reologice complexe, model Maxwell, model Voigt-Kelvin, model Zener*

**Abstract:** *The article compares the dynamic parameters of an 1DOF elastic mechanical system with elastomeric support elements. The rheological models of the damping viscous-elastic elements are: Maxwell, Voigt-Kelvin and Zener. The dynamic analysis parameters are the amplitude of the harmonic steady-state vibrations, the amplitude factor and the transmissibility ratio of the dynamic force to the foundation.*

**Keywords:** *dynamic parameters, 1DOF elastic mechanical system, elastomeric supports, complex rheological models, Maxwell rheological model, Voigt-Kelvin rheological model, Zener rheological model*

## 1. INTRODUCERE. MODELE REOLOGICE COMPLEXE

Modelele reologice utilizate frecvent pentru reprezentarea elementelor antivibratibile din cauciuc sunt: modelul elastic Hooke, modelul vâscoelastic Voigt-Kelvin, modelul vâscoelastic Maxwell, modelul histeretic și modelul vâscoelastic ereditar Zener [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7].

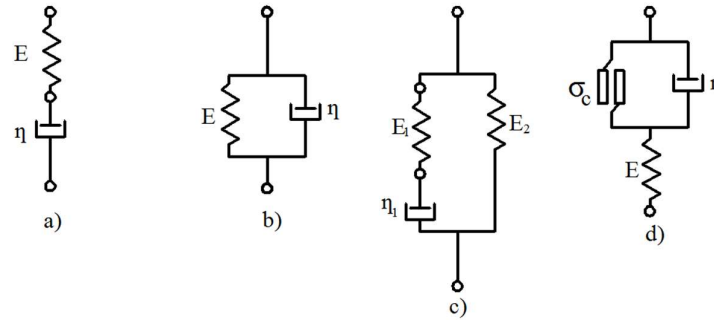


Fig. 1 Modele reologice complexe (M, V-K, Z, VEP)

În figura 1 sunt reprezentate schematizat aceste modele: a) modelul M (Maxwell), b) modelul V-K (Voigt-Kelvin), c) modelul Z (Zener  $\equiv$  Hooke-Maxwell), d) modelul vâsco-elasto-plastic.

## 2. MODELE FIZICE DE CALCUL ALE SISTEMELOR MECANICE 1DOF CU REAZEME ELASTOMERICE

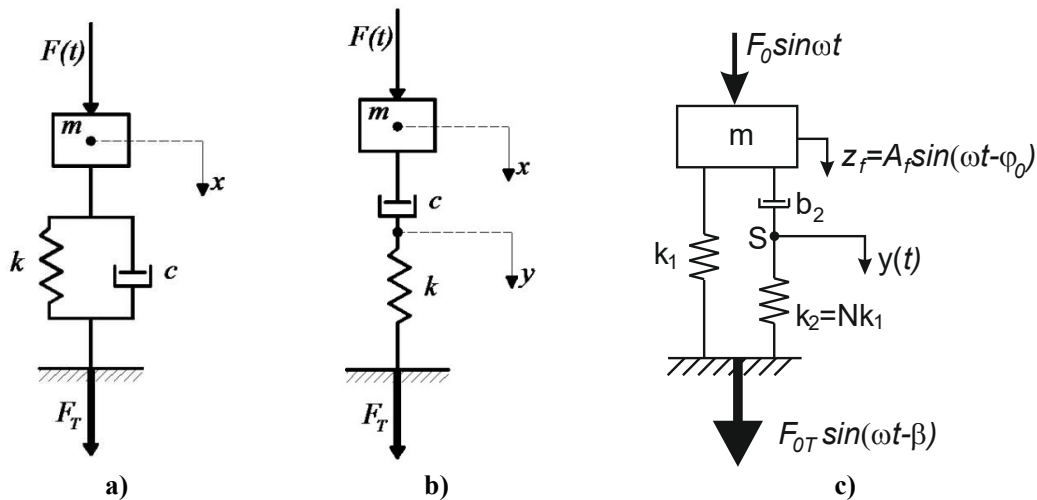


Fig. 2 Model fizic de calcul pentru sistemul mecanic 1DOF cu rezemare vâscoelastică  
a) model reologic V-K [3] [4] [6]; b) model reologic M [1]; c) model reologic Z [4] [5] [7] [8] [10]

## 3. ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMULUI MECANIC 1 DOF CU ELEMENT DE REAZEM DE TIP VOIGT-KELVIN

În figura 2a este prezentată schema de calcul a sistemului mecanic elastic 1DOF cu element masic și element de reazem de tip Voigt-Kelvin. Considerând  $x$  deplasarea pe verticală a masei  $m$ , deformația elementului Hooke este  $x$  iar viteza de deformație a elementului Newton este derivata în funcție de timp a lui  $x$ . Modelul matematic și parametrii dinamici ai sistemului [3] [4] [6] [11] [12] [13] sunt prezentați în tabelul 1.

**Tabel 1** Parametrii dinamici ai sistemului 1DOF cu element vâscoelastic Voigt-Kelvin

Tip amortizare	Amortizare vâscoasă $\zeta$	Amortizare histeretică $\delta$
Ecuția de mișcare	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$	
Amplitudinea vibrației forțate	$A_f = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$	$A_f = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + \delta^2}}$
Factorul de amplificare	$A(\Omega, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$	$A(\Omega, \delta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + \delta^2}}$
Transmisibilitatea	$T(\Omega, \zeta) = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$	$T(\Omega, \delta) = F_0 \sqrt{\frac{1 + \delta^2}{(1-\Omega^2)^2 + \delta^2}}$

#### 4. ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMULUI MECANIC 1 DOF CU ELEMENT DE REAZEM DE TIP MAXWELL

În figura 2b este prezentată schema de calcul a sistemului mecanic elastic 1DOF cu element masiv și element de reazem de tip Maxwell. Considerând  $x$  deplasarea pe verticală a masei  $m$  și  $y$  deplasarea punctului de legătură dintre elementul Newton și elementul Hooke, modelul matematic și parametrii dinamici ai sistemului [1] [13] [14] [15] [16] [17] sunt prezentați în tabelul 2.

**Tabel 2** Parametrii dinamici ai sistemului 1DOF cu element vâscoelastic Maxwell

Tip amortizare	Amortizare vâscoasă $\zeta$	Amortizare histeretică $\delta$
Ecuțiile de mișcare	$\begin{cases} m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) = F_0 \sin \omega t \\ c(\dot{x} - \dot{y}) - ky = 0 \end{cases}$	
Amplitudinea vibrației forțate	$A_f = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2\Omega^2}{\Omega^4 + 4\zeta^2\Omega^2(1-\Omega^2)^2}}$	$A_f = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{1 + \delta^2}{\Omega^4 + \delta^2(1-\Omega^2)^2}}$
Factorul de amplificare	$A(\Omega, \zeta) = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2\Omega^2}{\Omega^4 + 4\zeta^2\Omega^2(1-\Omega^2)^2}}$	$A(\Omega, \delta) = \sqrt{\frac{1 + \delta^2}{\Omega^4 + \delta^2(1-\Omega^2)^2}}$
Transmisibilitatea	$T = \frac{2\zeta\Omega}{\sqrt{\Omega^4 + 4\zeta^2\Omega^2(1-\Omega^2)^2}}$	$T = \frac{\delta}{\sqrt{\Omega^4 + \delta^2(1-\Omega^2)^2}}$

#### 5. ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMULUI MECANIC 1 DOF CU ELEMENT DE REAZEM DE TIP ZENER

În figura 2c este prezentată schema de calcul a sistemului mecanic elastic 1DOF cu element masiv și element de reazem de tip Zener (un element Hooke în paralel cu un element Maxwell). Considerând  $z$  deplasarea pe verticală a masei  $m$  și  $y$  deplasarea punctului de legătură

dintre elementul Newton și elementul Hooke al modelului Maxwell, modelul matematic și parametrii dinamici ai sistemului cu element Zener [7] [8] [19] [20] [21] sunt prezentați în tabelul 3.

**Tabel 3** Parametrii dinamici ai sistemului 1DOF cu element vâscoelastic Zener

Tip amortizare	Amortizare vâscoasă $\zeta$	Amortizare histeretică $\delta$
Ecuțiile de mișcare	$\begin{cases} m\ddot{z} + b_2(\dot{z}_f - \dot{y}) + k_1 z_f = F(t) \\ b_2(\dot{z}_f - \dot{y}) = k_2 y \end{cases}$	
Factorul de amplificare	$A(\Omega, \delta, N) = \frac{1 + \left(\frac{2\zeta\Omega}{N}\right)^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (N + 1 - \Omega^2)^2 \left(\frac{2\zeta\Omega}{N}\right)^2}}$	$A(\Omega, \delta, N) = \frac{N^2 + \delta^2}{\sqrt{N^2(1 - \Omega^2)^2 + \delta^2(N + 1 - \Omega^2)^2}}$
Transmisibilitatea	$T(\Omega, \zeta, N) = \frac{1 + \left(\frac{2\zeta\Omega}{N}\right)^2 (N + 1)^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{2\zeta\Omega}{N}\right)^2 (N + 1 - \Omega^2)^2}}$	$T(\Omega, \delta, N) = \frac{N^2 + \delta^2 (N + 1)^2}{\sqrt{N^2(1 - \Omega^2)^2 + \delta^2 (N + 1 - \Omega^2)^2}}$

## 6. CONCLUZII

1. Pentru sistemul mecanic 1DOF cu elemente de reazem de tip V-K:

► atunci când pulsația forței perturbatoare este redusă în comparație cu pulsația proprie a sistemului mecanic 1DOF ( $\omega \ll p$ ), indiferent de amortizarea din sistem factorul de amplificare tinde către valoarea  $A_0 \rightarrow 1$ , amplitudinea vibrației devenind egală cu deformația  $\delta_{st}$  corespunzătoare solicitării în regim static a sistemului; în acest caz, întreaga forță aplicată (în regim cvasistatic) se transmite direct, transmisibilitatea fiind  $T \rightarrow 1$  indiferent de mărimea amortizării;

► în situația în care pulsația forței perturbatoare este cu mult mai mare decât pulsația proprie a sistemului ( $\omega \gg p$ ), factorul de amplificare tinde către valoarea zero, mărimea amplitudinilor vibrațiilor forțate nefiind practic influențată de amortizarea din sistem; pentru valori ale pulsației relative  $\Omega > \sqrt{2}$ , transmisibilitatea este subunitară ( $T < 1$ ), sistemul comportându-se ca un izolator de forță, indicele de izolare fiind cu atât mai mare cu cât amortizarea este mai mică și pulsația relativă este mai mare;

► la rezonanță ( $\omega \approx p$ ), factorii de amplificare și amplitudinile vibrațiilor forțate cresc foarte mult, valorile acestora fiind puternic influențate de amortizarea din sistem (cu cât amortizarea este mai mare, cu atât cei doi parametri au valori mai mici); la rezonanță și transmisibilitatea are valori foarte mari, fiind puternic influențată de mărimea amortizării (cu cât amortizarea este mai mare, cu atât transmisibilitatea este mai mică);

-în intervalul  $\Omega \in [0, \sqrt{2}]$  transmisibilitatea este supraunitară, sistemul comportându-se ca un amplificator de forță.

2. Pentru sistemul mecanic 1DOF cu elemente de reazem de tip M:

► atunci când pulsația forței perturbatoare este redusă în comparație cu pulsația proprie a sistemului mecanic 1DOF ( $\omega \ll p$ ), situație în care arcul este foarte rigid, în funcție de amortizarea din sistem amplitudinea vibrației forțate poate lua valori foarte mari (cu atât mai mari cu cât amortizarea este mai mare!); în acest caz, amplitudinea mișcării este impusă de

rigiditatea arcului;

► în situația în care pulsația forței perturbatoare este cu mult mai mare decât pulsația proprie a sistemului ( $\omega \gg p$ ), ceea ce corespunde unui arc foarte moale sau unei forțe perturbatoare cu pulsație ridicată, amplitudinea vibrației forțate scade către zero, indiferent de mărimea amortizării;

► pentru valori mici ale pulsației relative  $\Omega \rightarrow 0$ , transmisibilitatea  $T \rightarrow 1$  indiferent de mărimea amortizării; întreaga forță aplicată (în regim cvasistatic) se transmite direct;

► pentru valori mari ale pulsației relative  $\omega \gg p$ , transmisibilitatea  $T \rightarrow 0$  indiferent de mărimea amortizării; cu cât amortizarea este mai mare, cu atât forța transmisă este mai mare, indicele de izolare fiind mai redus.

3. Pentru sistemul mecanic 1DOF cu elemente de reazem de tip Z:

► pentru  $N=0$  sau amortizare nulă (anularea modelului Maxwell), modelul Zener devine model Hooke;

► pentru  $N \rightarrow \infty$  (în modelul Maxwell arcul este înlocuit de o legătură rigidă și se obține un model vâscos Newton); modelul Zener devine un model Voigt-Kelvin;

► pentru modelul reologic simplu Hooke, pulsația relativă de rezonanță este  $\Omega=1$ ;

► pentru modelul reologic Voigt-Kelvin model, pulsația relativă de rezonanță de amplitudine este  $\Omega=1$ ;

► pentru modelul reologic complex Zener, rezonanța de amplitudine are loc la valori  $\Omega > 1$  și valoarea sa depinde de raportul elasticităților  $N$ ;

► dacă pentru modelele reologice simple (Hooke, Voigt-Kelvin), valoarea maximă a transmisibilității se obține pentru  $\Omega=1$ , pentru modelul reologic complex Zener, valoarea maximă a transmisibilității se obține pentru  $\Omega > 1$ , aceste valori depinzând de raportul elasticităților  $N$ .

## BIBLIOGRAFIE

[1] **G.C. Spânu (Ștefan), G.F. Căpățână**, *Analiza dinamică a sistemelor 1DOF cu reazeme elastomerice. Modelul reologic Maxwell*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 9 (2018) nr. 4, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2018

[2] **G.C. Spânu (Ștefan), G.F. Căpățână, A.M. Potîrniche**, *Analiza transmisibilității și a gradului de izolare la vibrații pentru sistemele mecanice elastice 1DOF cu amortizare vâscasă de tip Zener*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 10 (2019) nr. 1, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2019

[3] **R.M. Christensen**, *Theory of Viscoelasticity*, Dover Publications Inc., New York, 2010

[4] **P. Bratu**, *Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje*, Ed. Tehnică, București, 1990

[5] **Gh. Ene, C. Pavel**, *Introducere în tehnica izolării vibrațiilor și a zgomotului*, Editura Matrix Rom, București, 2012

[6] **N. Drăgan**, *Analiza dinamică a sistemelor mecanice cu reazeme elastomerice. Modelul Voigt-Kelvin*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 9 (2018) nr. 2, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2018

[7] **G.C. Spânu (Ștefan), N. Drăgan**, *Analiza transmisibilității și a gradului de izolare a vibrațiilor la sistemele mecanice cu amortizare structurală. Modelul Zener*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 8 (2017) nr. 4, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2017

[8] **G.C. Spânu (Ștefan)**, *Analiza factorului de amplificare la sistemele mecanice cu amortizare structurală. Modelul Zener*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 9 (2018) nr. 1, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2018

[9] **N. Dragan**, *Dynamic analysis of the parameters of the mechanical systems with structural damping*.

- Viscoelastic SLS model. Part 1: Amplitude factor*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2016
- [10] **N. Dragan**, *Dynamic analysis of the parameters of the mechanical systems with structural damping. Viscoelastic SLS model. Part 2: Transmissibility factor and isolation degree*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2016
- [11] **N. Dragan**, *Modal calculus of the reinforced concrete bridges modeled as a rigid solid beared on viscous elastic neoprene supports*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVI, ISSN 1224-5615, Galați, 2010
- [12] **P. Bratu, N. Dragan**, *Theoretical and numerical considerations on the composite neoprene used at vibration and shock isolations isolators*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVI, ISSN 1224-5615, Galați, 2010
- [13] **N. Dragan**, *Considerations on the composite neoprene vibration isolators used for the mechanical systems bearings. The dynamics of the non-linear models*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI) NR2, ISSN 1583-0691, 2012
- [14] **P. Bratu**, *Analiza structurilor elastice. Comportarea la acțiuni statice și dinamice*, Ed. Impuls, București, 2011
- [15] **P. Bratu**, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, București, 2000
- [16] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems Dynamics of the Rigid Body with Structural Symmetries. Modal Analysis. Transmitted Forces and Moments*, Proceedings of the 10<sup>th</sup> WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009
- [17] **Gh. Buzdugan, L. Fetcu, M. Radeș**, *Vibrații mecanice*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [18] **N. Dragan**, *Rheological SLS model. Dynamic parameters of the systems with viscous damping. Part 2: Transmissibility factor and isolation degree*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2017
- [19] **N. Dragan**, *Rheological SLS model. Dynamic parameters of the systems with viscous damping. Part 1: Amplitude factor*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2017
- [20] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems with nonlinear damping. Power and amplitude numerical analysis*, Proceedings of the 10<sup>th</sup> WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009
- [21] **N. Drăgan**, *Contribuții la analiza și optimizarea transportului prin vibrații - teza de doctorat*, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați, 2002