

ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMELOR DE TRANSMISIE CU ARBORI ELASTICI - CALCULUL MOMENTELOR DE INERȚIE ECHIVALENTE

DYNAMIC ANALYSIS OF THE ELASTIC DRIVESHAFTS TRANSMISSION SYSTEMS - THE CALCULATION OF THE EQUIVALENT MOMENTS OF INERTIA

Gigel Florin CĂPĂȚĂNĂ¹, Aurora Maria POTÎRNICHE²
Gianina Cornelia SPÂNU (ȘTEFAN)³

¹Universitatea “Dunărea de Jos” Galați; Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: gcapatana@ugal.ro

²Universitatea “Dunărea de Jos” Galați; Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: Potarniche.Aurora@ugal.ro

³Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, Romania - Școala doctorală de Inginerie Mecanică și Industrială
e-mail: spanugianina@yahoo.com

Rezumat: *Articolul prezintă metoda de calcul a rigidităților echivalente ale elementelor de transmitere a mișcării de tip arbore. Metoda ține seama atât de rapoartele de transmitere a mișcării prin intermediul angrenajelor fără alunecare (de tip angrenaje cu roți dințate) dar și de pierderile energetice mecanice din acestea cuantificate prin intermediul randamentelor mecanice h . Pentru exemplificarea metodei de echivalare se consideră un studiu de caz al unei transmisii mecanice ramificate cu arbori elastici și angrenaje cu roți dințate.*

Cuvinte cheie: *calcul dinamic, rigiditate echivalentă, moment de inerție echivalent, cuplu echivalent, eficiență mecanică*

Abstract: *The article presents the elaboration of the physical and mathematical dynamic models of the mechanical systems with elastic shafts and discrete mass elements subjected to dynamical loads, taking into consideration the equivalent mass and inertia, equivalent stiffness and equivalent torques. The result and final conclusions have a real utility in fast and operational calculus of the natural frequencies of this kind of mechanical models nDOF. It had taken into account both the ideal mechanical systems (with no energy losses, $\eta=1$) and the real systems according to their mechanical efficiency ($0 < \eta < 1$).*

Keywords: *dynamic calculus, equivalent stiffness, equivalent mass inertia, equivalent torque, mechanical efficiency*

1. INTRODUCERE

Pentru realizarea modelului fizic și matematic al transmisiilor mecanice cu arbori elastici și angrenaje fără alunecare (cu roți dințate), se consideră modelul simplu din figura 1 (sistem de transmitere cu angrenaj într-o singură treaptă) [1] [2] [3]. Se consideră cunoscut

raportul de transmitere a mișcării $i \equiv i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, precum și momentele de inerție mecanice ale roților aflate în angrenare J_1 și J_2 și randamentul mecanic al angrenajului η [4] [5] [6] [7].

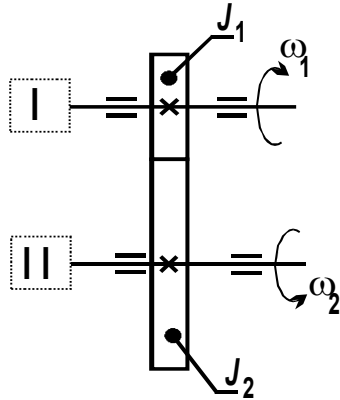


Fig. 1 Modelul fizic al angrenajului cu o singură treaptă [1] [2] [3]

2. CALCULUL MOMENTELOR DE INERȚIE MECANICE ECHIVALENTE

Momentele de inerție echivalente ale celor două roți ale angrenajului, funcție (și) de randamentul mecanic al angrenajului sunt [8] [9] [10] [11]:

2.1. Cazul angrenajului ideal ($\eta=1$)

$$J_{1 \rightarrow II} \equiv J_{1ech} = J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 = J_1 i_{12}^2 = J_1 i^2 \quad (1)$$

$$J_{2 \rightarrow I} \equiv J_{2ech} = J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = J_2 i_{21}^2 = \frac{J_2}{i^2}, \quad (2)$$

unde J_{1ech} is este momentul de inerție echivalent al roții 1 la arborele II și and J_{2ech} este momentul de inerție echivalent al roții 2 la arborele I.

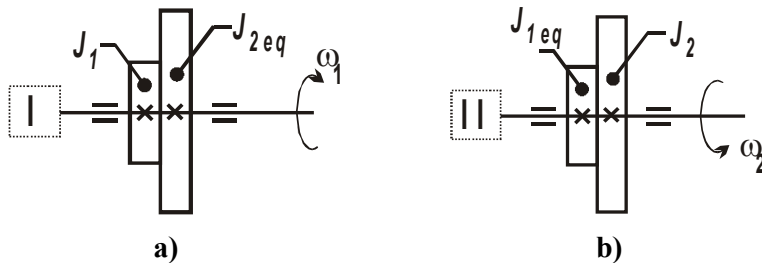


Fig. 2 Modelul fizic al angrenajului cu momentele de inerție echivalente [1] [4] [6]
a) echivalare la arborele I; b) echivalare la arborele II

Dacă se consideră că, după echivalarea momentelor de inerție ambele roți se rotesc cu aceeași viteză unghiulară, momentele de inerție totale ale angrenajelor se pot scrie

$$J_{echI} = J_1 + J_{2ech} = J_1 + \frac{J_2}{i^2} \quad , \quad (3)$$

$$J_{echII} = J_{1ech} + J_2 = J_1 i^2 + J_2 \quad , \quad (4)$$

unde J_{echI} și J_{echII} sunt momentele de inerție echivalente totale la arborele **I** respectiv la arborele **II** (conf. fig. 2).

2.2. Cazul angrenajului real ($\eta < 1$)

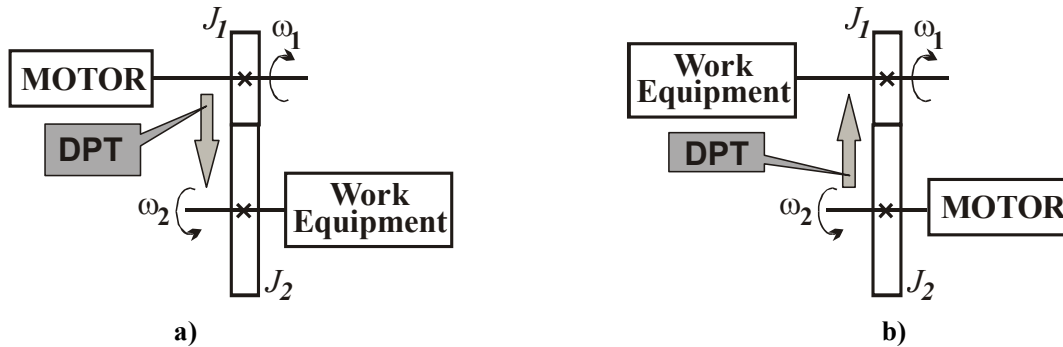


Fig. 3 Modelul fizic al angrenajului în funcție de sensul de transmitere al puterii [5] [8]
DPT - Direction of Power Transmission

Dacă se iau în considerare pierderile energetice din angrenaj prin intermediul randamentului mecanic $\eta < 1$, în funcție de sensul de transmitere a puterii (**DPT**, conf. fig. 3), momentele de inerție echivalente ale roților angrenate se pot scrie astfel [8]:

2.2.1. pentru sensul de transmitere a puterii 1→2 (fig. 3.a)

$$J_{1 \rightarrow II} \equiv J_{1eq} = J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \eta = J_1 i_{12}^2 \eta = J_1 i^2 \eta \quad (5)$$

$$J_{2 \rightarrow I} \equiv J_{2eq} = J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \frac{1}{\eta} = J_2 i_{21}^2 \frac{1}{\eta} = \frac{J_2}{i^2 \eta} \quad (6)$$

2.2.2. pentru sensul de transmitere a puterii 2→1 (fig. 3.b)

$$J_{1 \rightarrow II} \equiv J_{1eq} = J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \frac{1}{\eta} = J_1 i_{12}^2 \frac{1}{\eta} = \frac{J_1 i^2}{\eta} \quad (7)$$

$$J_{2 \rightarrow I} \equiv J_{2eq} = J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \eta = J_2 i_{21}^2 \frac{1}{\eta} = \frac{J_2 \eta}{i^2} \quad (8)$$

Pentru sensurile de transmitere a puterii din figura 3, momentetele totale echivalente ale angrenajelor la arborii I respectiv II sunt

$$J_{echI} = J_1 + J_{2eq} = J_1 + \frac{J_2 \eta}{i^2} \quad , \quad (9)$$

$$J_{echII} = J_{1e} + J_2 = \frac{J_1 i^2}{\eta} + J_2 \quad , \quad (10)$$

3. MODELUL DINAMIC AL SISTEMELOR DE TRANSMISIE CU ARBORI ELASTICI ȘI ANGRENAJE DE ROȚI DINȚATE - GENERALIZARE

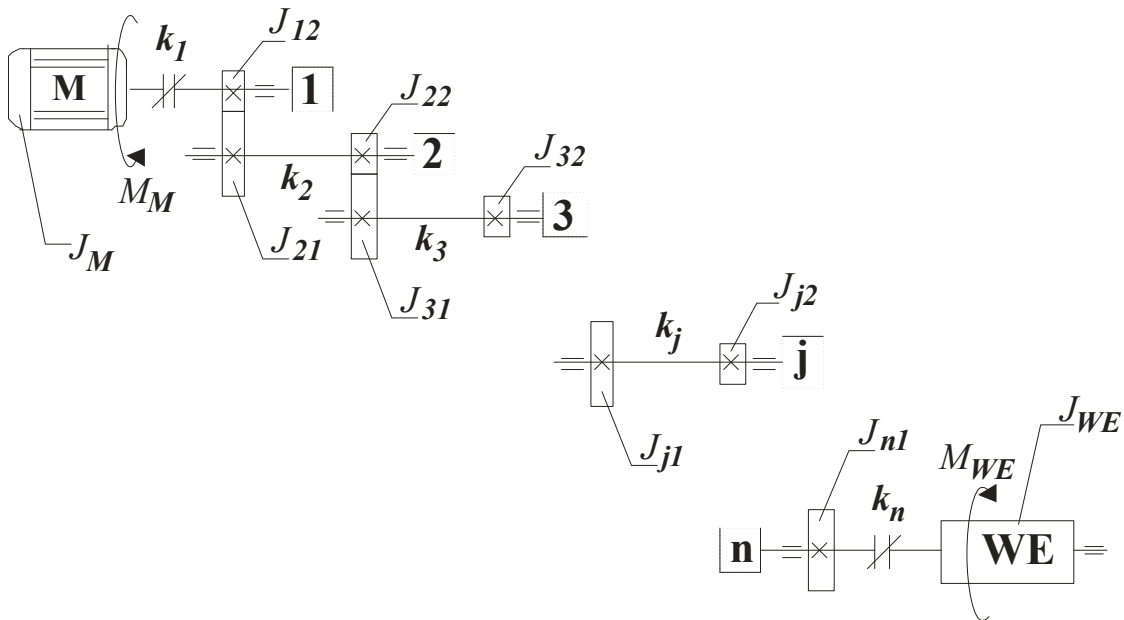


Fig. 4 Transmisie mecanică (n arbori elastici, $n-1$ angrenaje cu roți dințate) [1] [2]

Se consideră transmisia mecanică din figura 4, cu următoarele caracteristici [12] [13]:
 -motorul de antrenare **M**: J_M - momentul de inerție al rotorului, M_M - cuplul motor
 -echipamentul de lucru **WE**: J_{WE} - momentul de inerție al organului de lucru, M_{WE} - cuplul rezistent (tehnologic)
 - n arbori elastici, cu coeficienții de rigiditate $k_j, j = \overline{1, n}$ și vitezele unghiulare $\omega_j, j = \overline{1, n}$;

Analiza dinamică a sistemelor de transmisie cu arbori elastici - calculul momentelor de inerție echivalente

- $n-1$ angrenaje de roți dințate cu rapoartele de transmitere $i_{j,j+1} = \frac{\omega_j}{\omega_{j+1}}, j = \overline{1, n-1}$ și

randamentele mecanice $\eta_{j,j+1}, j = \overline{1, n-1}$

-momentele de inerție mecanice ale roților dințate $J_{j,2} \leftrightarrow J_{j+1,1}, j = \overline{1, n-1}$.

Se definesc:

► i_{1j} - raportul global de transmitere/transformare a mișcării de la arborele de ordin **1** la arborele de ordin **j**

► η_{1j} - randamentul mecanic global de transmitere a mișcării de la arborele de ordin **1** la arborele de ordin **j**

Relațiile de calcul pentru raportul global de transmitere a mișcării și randamentul mecanic global sunt după cum urmează:

$$i_j \equiv i_{1j} = \frac{\omega_1}{\omega_j} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 \omega_3} \dots \frac{\omega_{j-2} \omega_{j-1}}{\omega_{j-1} \omega_j} = \prod_{k=1}^{j-1} \frac{\omega_k}{\omega_{k+1}} = \prod_{k=1}^{j-1} i_{k,k+1} \quad (11)$$

$$\eta_j \equiv \eta_{1j} = \prod_{k=1}^{j-1} \eta_{k,k+1} \quad (12)$$

Pentru un sistem mecanic de acționare cu un singur organ de lucru și un singur motor de acționare (referință fig. 4), modelul echivalent de calcul la arborele motor **1** este prezentat în figura 5 [14] [15].

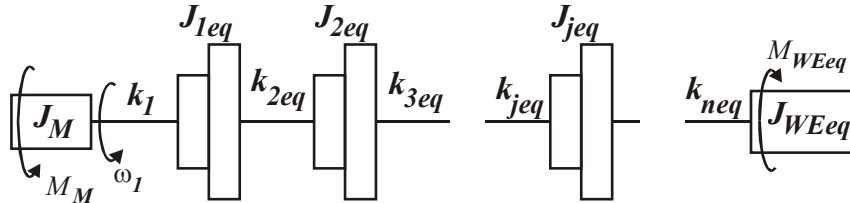


Fig. 5 The equivalent spur gears mechanical transmission [1] [2]

Cuplul rezistent al organului de lucru echivalent la arborele motorului de acționare se scrie

$$M_{WEech} = \frac{M_{WE}}{\prod_{k=1}^{n-1} i_{k,k+1} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \eta_{k,k+1}} = \frac{M_{WE}}{i_{1n} \cdot \eta_{1n}} \equiv \frac{M_{WE}}{i_n \cdot \eta_n}, \quad (13)$$

unde η_n este randamentul global/total al transmisiei sistemului de acționare.

Coeficienții arborilor elastici ai transmisiei echivalați la arborele motorului de acționare, funcție de rapoartele de transmitere și randamentele mecanice ale angrenajelor se scriu astfel:

-pentru arborele elastic **2**

$$k_{2ech} = \frac{k_2}{i_{12}^2 \cdot \eta_{12}^2} \equiv \frac{k_2}{i_2^2 \cdot \eta_2^2} \quad (14)$$

-pentru arborele elastic **3**

$$k_{3ech} = \frac{k_3}{i_{12}^2 i_{23}^2 \cdot \eta_{12}^2 \eta_{23}^2} = \frac{k_3}{i_{13}^2 \cdot \eta_{13}^2} \equiv \frac{k_2}{i_3^2 \cdot \eta_3^2} \quad (15)$$

-pentru arborii elastici **j**, $j = \overline{2, n}$

$$k_{jech} = \frac{k_j}{\prod_{k=1}^{j-1} i_{k,k+1}^2 \cdot \prod_{k=1}^{j-1} \eta_{k,k+1}^2} = \frac{k_j}{i_{1j}^2 \cdot \eta_{1j}^2} \equiv \frac{k_j}{i_j^2 \cdot \eta_j^2} \quad (16)$$

-pentru arborele elastic **n**

$$k_{nech} = \frac{k_n}{\prod_{k=1}^{n-1} i_{k,k+1}^2 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \eta_{k,k+1}^2} = \frac{k_n}{i_{1n}^2 \cdot \eta_{1n}^2} \equiv \frac{k_n}{i_n^2 \cdot \eta_n^2} \quad (17)$$

4. THE EQUIVALENT MOMENTS OF INERTIA OF THE GEARS, DRIVE MOTOR AND WORKS EQUIPMENT

Pentru sistemul mecanic cu transmisie cu arbori elastici și angrenaje cu roți dințate din figura 4 (model echivalent de calcul din figura 5), momentele de inerție echivalente la arborele motor **1** se determină după cum urmează [16 [17]:

-pentru roțile de pe arborele **2**

$$J_{2kech} = \frac{J_{2k}}{i_{12}^2 \cdot \eta_{12}^2} \equiv \frac{J_{2k}}{i_2^2 \cdot \eta_2^2} \quad (18)$$

-pentru roțile de pe arborele **3**

$$J_{3kech} = \frac{J_{3k}}{i_{12}^2 \eta_{12}^2 \cdot i_{23}^2 \eta_{23}^2} = \frac{J_{3k}}{i_{13}^2 \eta_{13}^2 \cdot i_{23}^2 \eta_{23}^2} \equiv \frac{J_{3k}}{i_3^2 \cdot \eta_3^2} \quad (19)$$

-pentru roțile de pe arborele **j**, $j = \overline{2, n}$

$$J_{jkech} = \frac{J_{jk}}{\prod_{k=1}^{j-1} i_{k,k+1}^2 \cdot \prod_{k=1}^{j-1} \eta_{k,k+1}^2} = \frac{J_{jk}}{i_{1j}^2 \eta_{1j}^2} \equiv \frac{J_{jk}}{i_j^2 \cdot \eta_j^2} \quad (20)$$

-pentru roțile de pe arborele **n** (arborele organului de lucru **WE**)

$$J_{nkech} = \frac{J_{nk}}{\prod_{k=1}^{n-1} i_{k,k+1}^2 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \eta_{k,k+1}^2} = \frac{J_{nk}}{i_{1n}^2 \eta_{1n}^2} \equiv \frac{J_{nk}}{i_n^2 \cdot \eta_n^2} \quad (21)$$

Analiza dinamică a sistemelor de transmisie cu arbori elastici - calculul momentelor de inerție echivalente

-pentru organul de lucru

$$J_{WEech} = \frac{J_{WE}}{\prod_{k=1}^{n-1} i_{k,k+1}^2 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \eta_{k,k+1}} = \frac{J_{WE}}{i_n^2 \cdot \eta_n} \quad (22)$$

5. MOMENTELE TOTALE DE INERȚIE ALE ANGRENAJELOR

Pentru perechile de roți dințate aflate în angrenare, momentul de inerție total se poate determina considerând că, după echivalare, roțile perechii au aceeași viteză unghiulară (viteza unghiulară a motorului de acționare ω_1 în cazul echivalării din figura 5), prin însumarea momentelor de inerție echivalente date de relațiile (18)-(21), astfel:

-pentru perechea de roți $1 \leftrightarrow 2$

$$J_{1eq} = J_{12} + J_{21eq} = J_{12} + \frac{J_{21}}{i_2^2 \eta_2} \quad (23)$$

-pentru perechea de roți $2 \leftrightarrow 3$

$$J_{2eq} = J_{22eq} + J_{31eq} = \frac{J_{22}}{i_2^2 \eta_2} + \frac{J_{31}}{i_3^2 \eta_3} \quad (24)$$

-pentru perechea de roți $n-1 \leftrightarrow n$

$$J_{n-1eq} = J_{n-1,2eq} + J_{n1eq} = \frac{J_{n-1,2}}{i_{n-1}^2 \eta_{n-1}} + \frac{J_{n1}}{i_n^2 \eta_n} \quad (25)$$

6. CONCLUZII

Modalitatea de echivalare a caracteristicilor inerțiale, elastice și de cupluri (motoare, rezistente) la oricare dintre arborii sistemului de transmitere a mișcării se poate face în funcție de rapoartele intermediare de transmitere a mișcării și de randamentele mecanice parțiale definite astfel:

$$i_{np} = \frac{\omega_n}{\omega_p} = \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n+2}} \dots \frac{\omega_{p-2}}{\omega_{p-1}} \frac{\omega_{p-1}}{\omega_p} = \prod_{k=n}^p \frac{\omega_k}{\omega_{k+1}} = \prod_{k=n}^p i_{k,k+1} \quad (26)$$

$$\eta_{np} = \prod_{k=n}^p \eta_{k,k+1} \quad (27)$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] N. Drăgan, *Analiza dinamică a echipamentelor cu arbori elastici*, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați, Facultatea de Inginerie din Brăila, 2006
- [2] N. Drăgan, *Dinamica mașinilor (CD)*, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați, Facultatea de Inginerie din Brăila, 2007
- [3] N. Drăgan., *Calculul solicitărilor dinamice echivalente în sistemele mecanice de transmitere a*

- mişcării cu arbori elastici*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 10 (2019) nr. 1, 2019
- [4] **G.F. Căpățână, A.M. Potîrniche, G.C. Spînu (Ștefan)**, *Analiza dinamică a sistemelor de transmisie cu arbori elastici - calculul rigidităților echivalente (cazul ideal $\eta=0$)*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 10 (2019) nr. 2, 2019
- [5] **G.F. Căpățână, A.M. Potîrniche, G.C. Spînu (Ștefan)**, *Calculul rigidităților echivalente în sistemele de transmisie cu arbori elastici - (cazul real $\eta \neq 0$)*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 10 (2019) nr. 3, 2019
- [6] **C. Constatin, N. Drăgan.**, *Analiza dinamică a sistemelor de transmisii cu arbori elastici - calculul rigidităților echivalente*, Buletinul celui de-al XXIV-lea Simpozion național de utilaje pentru construcții SINUC 2018 (CD), ISSN 2285-9209, ISSN L 2285-9209, Universitatea Tehnică de Construcții, București, 8 iunie 2018
- [7] **M.I. Chiriță, N. Drăgan.**, *Dynamic analysis of the elastic driveshafts transmission systems - the calculation of the equivalent moments of inertia*, Buletinul celui de-al XXV-lea Simpozion național de utilaje pentru construcții SINUC 2019 (CD), ISSN 2285-9209, ISSN L 2285-9209, Universitatea Tehnică de Construcții, București, 13 decembrie 2019
- [8] **N. Drăgan.**, *Dynamic calculation of the mechanical transmissions with gears and elastic shafts*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 1 Issue XVII, ISSN 1224-5615, Galați, 2011
- [9] **M.I. Chiriță, N. Drăgan.**, *Analiza dinamică a sistemelor de transmisii cu arbori elastici - calculul solicitărilor dinamice echivalente*, Buletinul celui de-al XXIV-lea Simpozion național de utilaje pentru construcții SINUC 2018 (CD), ISSN 2285-9209, ISSN L 2285-9209, Universitatea Tehnică de Construcții, București, 8 iunie 2018
- [10] **N. Drăgan.**, *The dynamic analysis of the mechanical systems. Calculus of the equivalent dynamic forces and torques*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2008
- [11] **N. Drăgan., A.M. Potîrniche.**, *The calculus of the equivalent rigidity coefficients for the shafts of the elastical systems*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2008
- [12] **A.M. Potîrniche, G.C. Spînu (Ștefan), G.F. Căpățână.**, *Analiza dinamică a sistemelor mecanice de transmitere cu arbori elastici. Determinarea momentelor de torsiune echivalente*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 10 (2019) nr. 1, 2019
- [13] **P.P. Bratu, N. Drăgan.**, *Vibrații mecanice. Aplicații*, ISBN 973-98409-8-1, Editura Impuls, București, 1998
- [14] **N. Drăgan.**, *The analysis of the axial springs' weight influence on the resonance characteristic of the elastical mechanical systems*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2006
- [15] **N. Drăgan.**, *The analysis of the torsional springs' inertia influence on the resonance characteristic of the elastical mechanical systems*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galați, 2006
- [16] **N. Drăgan.**, *The analysis of the influence of distributed mass of the springs on the resonance of the elastical mechanical systems*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI) NR1, ISSN 1583-0691, 2012
- [17] **N. Drăgan.**, *Considerations on the influence of distributed mass of the bending springs on the resonance of the IDOF elastical mechanical systems*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI) NR2, ISSN 1583-0691, 2012