

ANALIZA DINAMICĂ A PENDULULUI GIROSCOPIC. MODELARE MATEMATICĂ. MODEL EXPERIMENTAL

DYNAMIC ANALYSIS OF THE GIROSCOPIC PENDULUM. MATHEMATICAL MODELING. EXPERIMENTAL MODEL

Drd. ing. Nicolae IACOB¹, Aurora Maria POTÎRNICHE,² Gigel Florin CĂPĂȚĂNĂ³

¹Institutul de Mecanica Solidelor al Academiei Române
e-mail: nicolaeiacob84@yahoo.com

²Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania, Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: Potarniche.Aurora@ugal.ro

³Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania, Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice -MECMET
e-mail: gcapatana@ugal.ro

Rezumat: *Articolul propune un model matematic al dublului pendul giroscopic, precum și realizarea practică a unui model fizic în vederea studiului experimental a dinamicii acestuia. Modelul fizic al pendulului este realizat cu două discuri având mișcări independente de rotație și o articulație dublă care permite sistemului o mișcare de pendulare pe două axe de coordonate. Cuvinte cheie: pendul giroscopic, analiză dinamică, mișcare de precesie, cuplu giroscopic*

Abstract: *This article proposes a mathematical model of the double gyroscopic pendulum, as well as the practical realization of a physical model for the experimental study of its dynamics. The physical model of the pendulum is realized with two discs having independent rotational movements and a double joint that allows the system a pendulum movement on two coordinate axes.*

Keywords: *gyroscopic pendulum, dynamic analysis, precession movement, gyroscopic couple*

1. INTRODUCERE

Studiul fenomenelor giroscopice a fost fundamentat de către Leonard Euler, care în anul 1765 a elaborat celebra teorie a mișcării solidului cu punct fix. Teoria giroscopului a fost continuată și dezvoltată de către mecanicieni celebri: Lagrange, Poinsot, Sofia Kovalevskiaia, Necrasov, Jukovski [1] [2] [3] [4].

Echipamentele și sistemele giroscopice se utilizează pentru măsurarea înclinărilor, direcțiilor, vitezelor unghiulare, accelerațiilor liniare și unghiulare, cuplurilor, vibrațiilor. Ele mai pot fi folosite în cadrul sistemelor automate ca elemente integratoare și derivatoare. Sistemele giroscopice au o largă utilizare în pilotarea automată a (aero)navelor în navigația aeriană și maritimă, în dirijarea rachetelor și vehiculelor spațiale, în stabilizarea mișcării

aparaterelor aerospațiale, în navigația inerțială.

Giroscopul este un corp rigid greu cu punct fix, cu simetrie de revoluție în repartiția masei care execută o mișcare de precesie regulată, având viteza unghiulară de rotație proprie orientată în lungul axei de simetrie și de revoluție.

2. DUBLUL PENDUL GIROSCOPIC. MODEL EXPERIMENTAL

Dublul pendulul giroscopic (fig. 1) este un mecanism format din: batiu/suport - element fix rigid (fig. 2), o tijă rigidă (fig. 3), o articulație dublă (fig. 4) și două platane/discuri (fig. 5) ce execută, fiecare, mișcări de rotație independente. Gradul de mobilitate al acestui mecanism este $M=2$, deoarece are două mișcări independente pe axele de coordonate OX și OY . Cuplul giroscopic apare datorită platanelor ce execută mișcări de rotație și o mișcare de pendulare.



Fig. 1 Dublul pendul giroscopic

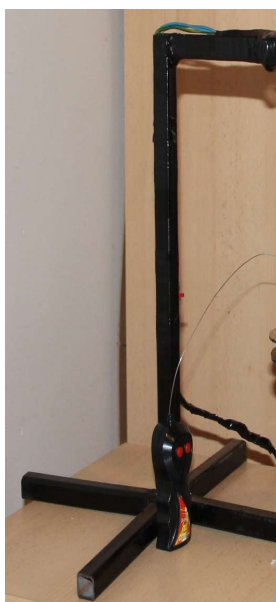


Fig. 2 Batiu



Fig. 3 Tijă rigidă



Fig. 4 Articulație dublă



Fig. 5 Platane/discuri

3. DUBLUL PENDUL GIROSCOPIC. MODEL FIZIC ȘI MATEMATIC

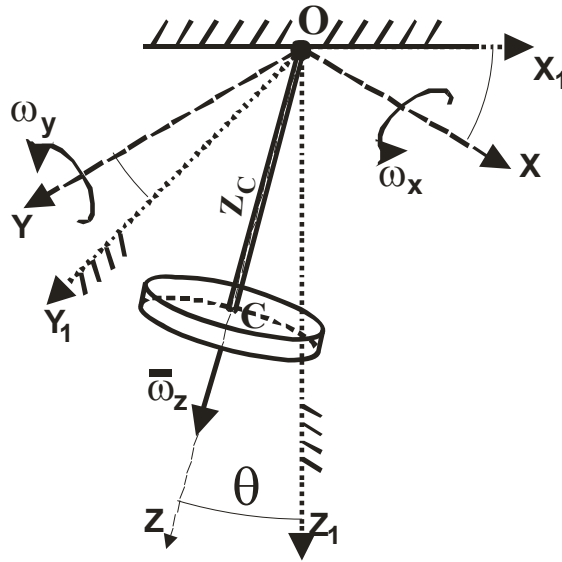


Fig. 6 Dublul pendul giroscopic - model fizic [5]-[11]

În figura 6 este prezentat modelul fizic simplificat al dublului pendul giroscopic. Conform [12] [13] [14] [15] [16], sistemul de ecuații Euler pentru rigidul cu punct fix este

$$\begin{cases} J_1 \varepsilon_x - \omega_y \omega_z (J_2 - J_3) = M_{Ox} \\ J_2 \varepsilon_y - \omega_z \omega_x (J_3 - J_1) = M_{Oy} \\ J_3 \varepsilon_z - \omega_x \omega_y (J_1 - J_2) = M_{Oz} \end{cases} \quad (1)$$

unde $J_1 \equiv J_{Ox}$, $J_2 \equiv J_{Oy}$ și $J_3 \equiv J_{Oz}$ sunt momentele principale de inerție ale pendulului.

Din motive de simetrie structurală a pendulului, se poate scrie [17] [18]

$$\begin{cases} J_1 = J_2 = J \cong m z_C^2 \\ J_3 = J_\Delta \end{cases} \quad (2)$$

unde: m este masa totală a pendulului

$z_C \equiv OC$ - distanța de la punctul de suspensie O la centrul de greutate C al pendulului giroscopic

J_Δ - momentul de inerție al pendulului față de axa proprie de rotație

Dacă se notează $J - J_\Delta = J_{giro}$ și se consideră funcționarea în regim staționar a giroscopului (în care momentul de acționare M_{Oz} învinge doar cuplul forțelor de frecare), ecuațiile de mișcare devin

$$\begin{cases} J\varepsilon_x + J_{giro}\omega_y\omega_z = 0 \\ J\varepsilon_y - J_{giro}\omega_z\omega_x = 0 \\ J_{\Delta}\varepsilon_z = 0 \leftrightarrow \omega_z \equiv \omega_{rot} = ct. \end{cases}, \quad (3)$$

unde ω_{rot} este viteza unghiulară de rotație proprie a giroscopului.

Considerând o variație armonică a unghiului de rotație în jurul axei mobile Oy , se poate scrie

$$\begin{cases} \varphi_y = \Phi \cos\omega_p t \\ \omega_y = -\Phi\omega_p \sin\omega_p t, \\ \varepsilon_y = -\Phi\omega_p^2 \cos\omega_p t \end{cases}, \quad (4)$$

unde: ω_p este pulsația mișcării de pendulare
 Φ - amplitudinea mișcării de pendulare

Din primele 2 ecuații ale sistemului (3) rezultă:

$$\begin{cases} mz_C^2\varepsilon_x - J_{giro}\omega_z\Phi\omega_p \sin\omega_p t = 0 \\ -mz_C^2\Phi\omega_p^2 \cos\omega_p t - J_{giro}\omega_z\omega_x = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Din prima ecuație a sistemului (5) rezultă:

$$\varepsilon_x = \frac{J_{giro}}{mz_C^2} \omega_z \Phi \omega_p \sin\omega_p t \quad (6)$$

Din a 2-a ecuație a sistemului (5) rezultă:

$$\omega_x = -\frac{mz_C^2}{J_{giro}} \frac{\Phi\omega_p^2}{\omega_z} \cos\omega_p t \quad (7)$$

Prin integrarea ecuației (6) se obține:

$$\omega_x = \frac{J_{giro}}{mz_C^2} \omega_z \Phi \omega_p \int \sin\omega_p t dt = -\frac{J_{giro}}{mz_C^2} \Phi \omega_z \cos\omega_p t \quad (8)$$

Din egalitatea ω_x date de relațiile (7) și (8) se obține:

$$\begin{aligned} \frac{mz_C^2}{J_{giro}} \frac{\omega_p^2}{\omega_z} &= \frac{J_{giro}}{mz_C^2} \omega_z \Rightarrow \frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} = \left(\frac{J_{giro}}{mz_C^2}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{\omega_p}{\omega_z} &= \frac{J_{giro}}{mz_C^2} \Rightarrow \omega_p = \frac{J_{giro}}{mz_C^2} \omega_z \end{aligned} \quad (9)$$

4. STUDIU DE CAZ - CALCULUL PULSAȚIEI DE PENDULARE

Se consideră pendulul giroscopic din figura 1 pentru care se cunosc:

$$n_{rot} = \frac{1200rot}{min} \Rightarrow \omega_{rot} \equiv \omega_z = \frac{2\pi n_{rot}}{60} = \frac{2\pi \cdot 1200}{60} = 125,66rad/s$$

$$\left. \begin{array}{l} m_{platane} = 0,04Kg \\ r_{platane} = 0,04m \end{array} \right\} \Rightarrow J_{\Delta} = 2 \frac{0,04 \cdot 0,04^2}{2} = 64 \times 10^{-6} Kg m^2$$

$$l_{tija} \equiv z_c = 0,2m$$

$$m_{tija} = 0,07Kg$$

Prin utilizarea relației de calcul (9) se obține o pulsație a mișcării de pendulare a pendulului realizat fizic $\omega_z \cong 10rad/s$.

5. STUDIU EXPERIMENTAL

În studiul experimental al dublului pendul giroscopic au fost analizate două cazuri: cazul în care vitezele unghiulare ale platanelor au același sens și cazul în care vitezele unghiulare ale platanelor au sensuri opuse [19] [20]. În primul caz s-a constatat că mișcarea de pendulare este influențată de cuplul giroscopic adică în momentul în care pendulul execută o mișcare oscilatorie în jurul axei Ox , momentul giroscopic schimbă direcția de pendulare pe Oy . În al doilea caz, cele două viteze unghiulare fiind opuse ele se anulează, iar cuplul giroscopic nu mai apare, iar mișcarea de pendulare rămâne pe aceeași direcție.

6. CONCLUZII

În urma efectuării experimentului s-a constatat că apariția momentului giroscopic modifică parametrii cinematici și dinamici ai unui sistem aflat în mișcare.

Mișcarea periodică nu este una continuă, ea este una amortizată datorită forțelor disipative din sistem și anume forțele de frecare.

BIBLIOGRAFIE

- [1] **G. Axinti**, *Compendiu de Mecanică*, Editura Tehnica INFO, Chișinău, 2008
- [2] **P.P. Bratu**, *Mecanica teoretică*, Editura Impuls, București, 2000
- [3] **G. Axinti**, **N. Drăgan**, *Note de curs – Mecanica teoretică. Elemente de mecanică analitică*, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie din Brăila, 1994
- [4] **G. Axinti**, **N. Drăgan**, **C.N. Bordea**, *Elemente de mecanică analitică cu aplicații în mecanica tehnică* Ed. Impuls, București, 2002
- [5] **N. Iacob**, **N. Drăgan**, *Dublul pendul giroscopic. Model fizic și matematic*, Buletinul celui de-al XXV-lea Simpozion național de utilaje pentru construcții SINUC 2019 (CD), ISSN 2285-9209, Universitatea Tehnică de Construcții, București, 13 decembrie 2019
- [6] **N. Drăgan**, *Structural analysis of the pendulous vibrators with one direction adjustable disturb*

- force*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. VIII (XVIII), Section Mechanics, ISSN 1583-0691, 2009
- [7] **N. Drăgan**, *The dynamics of pendulous vibrators*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. VIII (XVIII), Section Mechanics, ISSN 1583-0691, 2009
- [8] **N. Drăgan, G. Axinti**, *The structural analysis of the pendulous vibrators with one direction adjustable disturb force*, Analele Universității “Dunărea de Jos” din Galați, Fascicula XIV Inginerie mecanică, ISSN 1224-5615, 2001
- [9] **N. Drăgan, G. Axinti**, *The pendulous vibrators' mathematical modeling*, Analele Universității “Dunărea de Jos” din Galați, Fascicula XIV Inginerie mecanică, ISSN 1224-5615, 2001
- [10] **I. Dragomir, N. Dragan**, *Dynamics of the pendulous vibrators*, Proceedings of the Annual Symposium of the Institute of Solid Mechanics "SISOM 2009" and Session of the Commission of Acoustics, Romanian Academy, Bucharest, May 28-29 2009
- [11] **B. Lificiu, N. Dragan**, *Studies regarding the pendulous vibrators with adjustable disturbing force. Structural analysis*, Proceedings of the Annual Symposium of the Institute of Solid Mechanics "SISOM 2009" and Session of the Commission of Acoustics, Romanian Academy, Bucharest, May 28-29 2009
- [12] **P. Bratu, N. Dragan**, *Vibrații mecanice. Aplicații*, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie din Brăila, 1996
- [13] **P. Bratu, N. Dragan**, *Vibrații mecanice. Aplicații*, Ed. Impuls, București, 1998
- [14] **P. Bratu**, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, București, 2000
- [15] **N. Dragan**, *Vibrații (CD)*, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie din Brăila, 2007
- [16] **Gh. Buzdugan, L. Fetcu, M. Radeș**, *Vibrații mecanice*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [17] **N. Dragan**, *Dinamica mașinilor*, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie din Brăila, 120 pag., 2010
- [18] **N. Drăgan**, *Dinamica mașinilor (CD)*, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie din Brăila, 2007
- [19] **N. Drăgan**, *Contribuții la analiza și optimizarea transportului prin vibrații - teza de doctorat*, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați, 2002
- [20] **N. Dragan**, *Dinamica transportoarelor vibratoare inerțiale*, Ed. Impuls, București, 2003