Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Volumul 12 (anul 2021), Numărul 1 © Matrix Rom

ANALIZA DINAMICĂ A UNUI SISTEM MECANIC 6DOF CU LEGĂTURI VÂSCO-ELASTICE ȘI SIMETRII STRUCTURALE

THE DYNAMIC ANALYSIS OF A 6DOF MECHANICAL SYSTEM WITH VISCO-ELATIC BEARINGS AND STRUCTURAL SYMMETRIES

Aurelian Gabriel RADU[1], Nicușor DRĂGAN[2], Gigel Florin CĂPĂŢÂNĂ[3]

[1] Universitatea "Dunărea de Jos" Galaţi, Facultatea de Inginerie şi Agronomie din Brăila
e-mail: gabiaurelian@yahoo.com

[2]Universitatea "Dunărea de Jos" Galaţi, Facultatea de Inginerie şi Agronomie din Brăila, Centrul de Cercetare Mecanica Maşinilor şi Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: nicusor.dragan@ugal.ro

[3]Universitatea "Dunărea de Jos" Galaţi, Facultatea de Inginerie şi Agronomie din Brăila, Centrul de Cercetare Mecanica Maşinilor şi Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: gcapatana@ugal.ro

Rezumat: *Articolul prezintă analiza dinamică a unui sistem mecanic 6DOF cu legături vâsco-elastice şi simetrii structurale (de dispunere a maselor, a elementelor elastice şi a aparatelor de reazem elastomerice). Simetriile conduc la obţinerea unor modele fizice şi matematice simplificate, cu sisteme de ecuaţii diferenţiale decuplate ce descriu comportamentul dinamic în subsisteme de mişcări cuplate după anumite direcţii. Dacă sistemul mecanic este rezemat prin intermediul a patru legături elastice (conform studiului de caz) ce conduce la o simetrie după un plan vertical-longitudinal, modelul matematic devine mai simplu iar vibraţiile sistemului se decuplează în două subsisteme cu câte 3 mişcări cuplate.*
Cuvinte cheie: *6 grade de libertate dinamică, analiză dinamică, simetrii structurale, sistem cu mişcări decuplate, subsisteme dinamice cu mişcări cuplate*

Abstract: *The paper presents the dynamic analysis of a 6DOF mechanical system with visco-elastic bearings and structural symmetries (masses, elastomeric bearings). The physical and mathematical models are simplified due of the symmetries; the systems of differential equations are decoupled and describe the dynamic behavior in subsystems of coupled movements. The mechanical system supported by four elastic bearings (according to the case study) lead to a symmetry after a vertical-longitudinal plane; in this case, the mathematical model becomes simpler and the vibrations of the system are decoupled into two subsystems with 3 coupled movements.*
Keywords: *6DOF, dynamic analysis, structural symmetries, system with decoupled movements, dynamic subsystems with coupled movements*

1. INTRODUCERE. MODELUL DINAMIC AL SISTEMULUI MECANIC-ELASTIC 6 DOF. MODURILE PROPRII DE VIBRAȚIE

Sistemul ecuaţiilor diferenţiale de mişcare ale solidului rigid cu legături vâsco-elastice are şase ecuaţii cuplate elastic şi vâscos. Sub formă matricială, modelul dinamic 6DOF pentru vibrațiile forțate ale acestui sistem se scrie [1] [2] [3] [4] [7] [12] [17] [18]:

$$\underline{\underline{A}}\ddot{q} + \underline{\underline{B}}\dot{q} + \underline{\underline{C}}q = \underline{\underline{f}} \tag{1}$$

Pentru analiza modală a sistemului mecanic vâsco-elastic, se consideră sistemul de ecuații diferențiale de mișcare (1) neperturbat [1] [2] [3] [4] [7] [12] [17] [18]:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{\dot{q}}} + \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}}\,, \tag{2}$$

unde: $\underline{A}$ este matricea coeficienților de inerție a sistemului
$\underline{B}$ - matricea coeficienților de amortizare vâscoasă
$\underline{C}$ - matricea coeficienților de rigiditate/flexibilitate
$\underline{\underline{q}}$- vectorul coordonatelor generalizate (deplasărilor)
$\underline{\underline{\dot{q}}}$- vectorul vitezelor generalizate
$\underline{\underline{\ddot{q}}}$- vectorul accelerațiilor generalizate
$\underline{\underline{0}}$- vectorul nul

Pentru determinarea modurilor proprii de vibrație a sistemului mecanic, se consideră sistemul de ecuații diferențiale de mișcare (2), în care se neglijează coeficienții de amortizare:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}}\,, \tag{3}$$

Dacă se înmulțește vectorial la stânga ec. (3) cu inversa matricii de inerție (care este nesingulară), se obține ecuația matricială diferențială canonică [5] [6] [8]

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{O}} \quad |\times \underline{A}^{-1}(stg.) \quad \rightarrow \underbrace{\underline{A}^{-1}\underline{A}}_{=I_6}\,\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underbrace{\underline{A}^{-1}\underline{C}}_{=\underline{D}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{O}} \tag{4a}$$

sau

$$\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{O}}\,, \tag{4a}$$

unde:

$I_6 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ este matricea unitate de ordinul 6

$\underline{D} = \underline{A}^{-1} \times \underline{C} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{61} & \cdots & d_{66} \end{bmatrix}$ este matricea dinamică a sistemului 6DOF

Pentru determinarea modurilor proprii de vibraţie (pulsații/frecvențe proprii și vectori proprii) se consideră ecuația matricială/vectorială algebrică de forma [9] [10] [11]

$$\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{v}} = \lambda \underline{\underline{v}}\,, \tag{5}$$

unde: $\lambda_i = p_i^2 \;\; i = \overline{1,6}$ sunt valorile proprii ale matricii dinamice $\underline{D}$
$\underline{\underline{v}}_i \;\; i = \overline{1,6}$ - vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ_i

2. MATRICILE CARACTERISTICE ALE SISTEMULUI MECANIC 6 DOF

Considerându-se un sistem de referință triortogonal-drept cu originea în centrul de greutate al sistemului (modelat ca un solid-rigid cu legături vâsco-elastice) și axe principale (momentele de inerție centrifugale sunt nule), matricea coeficienților de inerţie devine diagonală, modelul matematic decuplându-se inerţial [1] [2] [13] [14]:

$$\underline{A} = DIAG\left(m, m, m, J_x, J_y, J_z\right) , \tag{6}$$

Modelul matematic al sistemului rămâne cuplat vâscos și elastic prin intermediul matricilor coeficienților de amortizare vâscoasă $\underline{B}$ și a matricii coeficienților de rigiditate/elasticitate $\underline{C}$. Ecuaţiile diferenţiale de mişcare ramân cuplate elastic și vâscos. Formele generale ale matricilor coeficienților de cuplaj sunt:

-matricea coeficienților de amortizare [4] [16] [17]:

$$\underline{B}=\begin{bmatrix} \sum c_{ix} & 0 & 0 & 0 & \sum c_{ix} z_i & -\sum c_{ix} y_i \\ 0 & \sum c_{iy} & 0 & -\sum c_{iy} z_i & 0 & \sum c_{iy} x_i \\ 0 & 0 & \sum c_{iz} & \sum c_{iz} y_i & -\sum c_{iz} x_i & 0 \\ 0 & -\sum c_{iy} z_i & \sum c_{iz} y_i & \sum\left(c_{iy} z_i^2 + c_{iz} y_i^2\right) & -\sum c_{iz} x_i y_i & -\sum c_{ix} y_i z_i \\ \sum c_{ix} z_i & 0 & -\sum c_{iz} x_i & -\sum c_{iz} x_i y_i & \sum\left(c_{iz} x_i^2 + c_{ix} z_i^2\right) & -\sum c_{ix} y_i z_i \\ -\sum c_{ix} y_i & \sum c_{iy} x_i & 0 & -\sum c_{ix} y_i z_i & -\sum c_{ix} y_i z_i & \sum\left(c_{ix} y_i^2 + c_{iy} x_i^2\right) \end{bmatrix} \tag{7}$$

-matricea coeficienților de rigiditate[4] [16] [17]::

$$\underline{C}=\begin{bmatrix} \sum k_{ix} & 0 & 0 & 0 & \sum k_{ix} z_i & -\sum k_{ix} y_i \\ 0 & \sum k_{iy} & 0 & -\sum k_{iy} z_i & 0 & \sum k_{iy} x_i \\ 0 & 0 & \sum k_{iz} & \sum k_{iz} y_i & -\sum k_{iz} x_i & 0 \\ 0 & -\sum k_{iy} z_i & \sum k_{iz} y_i & \sum\left(k_{iy} z_i^2 + k_{iz} y_i^2\right) & -\sum k_{iz} x_i y_i & -\sum k_{iy} z_i x_i \\ \sum k_{ix} z_i & 0 & -\sum k_{iz} x_i & -\sum k_{iz} x_i y_i & \sum\left(k_{iz} x_i^2 + k_{ix} z_i^2\right) & -\sum k_{ix} y_i z_i \\ -\sum k_{ix} y_i & \sum k_{iy} x_i & 0 & -\sum k_{iy} z_i x_i & -\sum k_{ix} y_i z_i & \sum\left(k_{ix} y_i^2 + k_{iy} x_i^2\right) \end{bmatrix} \tag{8}$$

3. SISTEM MECANIC 6 DOF CU SIMETRII STRUCTURALE

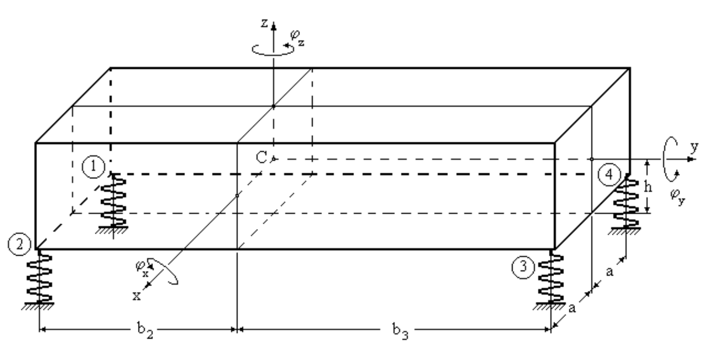

Fig. 1 Solid-rigid 6DOF cu simetrie structurală după un plan vertical-longitudinal [4] [6] [11] [16]

Se consideră modelul idealizat al sistemului mecanic elastic din figura 1 cu simetrii structurale (inerții, elasticități, amortizări, rezemare) și sistem de axe central și principal **Cxyz**. Simetriile care pot fi luate în considerare sunt [19] [22] [23]:

-axă verticală de simetrie **Cz** dacă toate punctele de reazem sunt identice și $b_2 = b_3$

-plan vertical-longitudinal de simetrie **yCz** dacă perechile elementelor de reazem 1-2 și 3-4 sunt identice dar 2-3 și 4-1 nu sunt, sau dacă $b_2 \neq b_3$, sau ambele.

Dacă sistemul are simetrie structurală după planul vertical-longitudinal **yCz**, mişcările se decuplează în 2 subsisteme cu mişcări cuplate astfel [20] [21] [22]:

1) subsistem cu mişcări cuplate de derapare laterală + ruliu + giraţie $(X, \varphi_y, \varphi_z)$

2) subsistem cu mişcări cuplate de înaintare + săltare + tangaj (Y, Z, φ_x)

4. STUDIU DE CAZ - MODURILE PROPRII ALE UNEI GRINZI DIN BETON ARMAT CU PLAN DE SIMETRIE VERTICAL-LONGITUDINAL

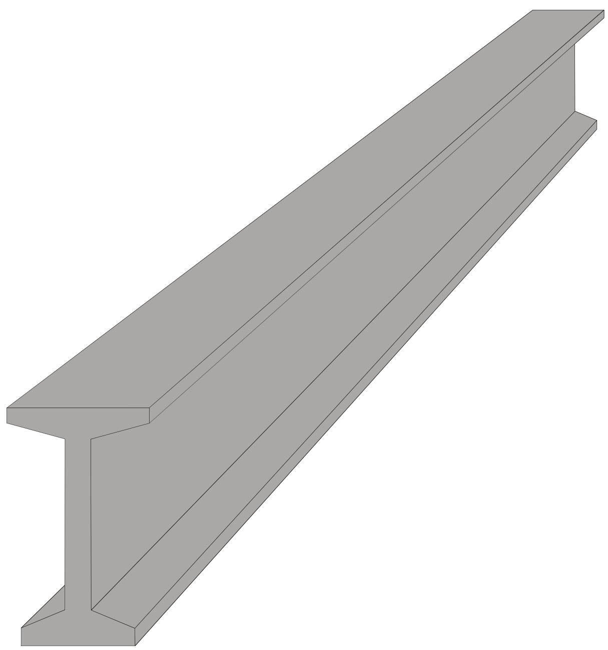

Fig. 2 Grindă de 40 m din beton armat (axonometrie)

În figurile 2 (axonometrie) și 3 (secțiune) este prezentată o grindă din beton armat utilizată la structura de rezistență (tablier) ale unor poduri/viaducte de pe autostrada Transilvania. Grinda este rezemată pe 4 aparate de reazem identice două câte două la fiecare dintre cele 2 capete. Caracteristicile dimensionale și structurale ale sistemului grindă-reazeme sunt următoarele (din desenele de execuție și montaj sau calculate):

1)CARACTERISTICI DIMENSIONALE:

■dimensiuni de gabarit **l×L×H** - 1,2×40×2 [m]

■cote de montaj **A=2a×B=2b** - 0,390×39,100 [m]

2)CARACTERISTICI INERŢIALE (model cu plan vertical-longitudinal de simetrie):

■$\boldsymbol{h}$=*1,0309712* [m]

■masa $\boldsymbol{m}$=*82950,400* [kg]

■momente de inerție și raze de inerţie (axe centrale și principale)

J_{Cx}=11104962,627 kgm^2 $\quad$ i_x=11,570425 m

J_{Cy}= 49106,522 kgm^2 $\quad$ i_y=0,7694145 m

J_{Cz}=11064250,563 kgm^2 $\quad$ i_z=11,549196 m

3)CARACTERISTICI REAZEME VÂSCO-ELASTICE:

Reazem i=1,...,4		**1≡2**	**3≡4**
k_i	k_{ix}	$0,26\times10^6$ N/m	$0,51\times10^6$ N/m
	k_{iy}	$0,26\times10^6$ N/m	$0,51\times10^6$ N/m
	k_{iz}	312×10^6 N/m	496×10^6 N/m
c_i	c_{ix}	16×10^3 Ns/m	72×10^3 Ns/m
	c_{iy}	16×10^3 Ns/m	72×10^3 Ns/m
	c_{iz}	20×10^6 Ns/m	30×10^6 Ns/m

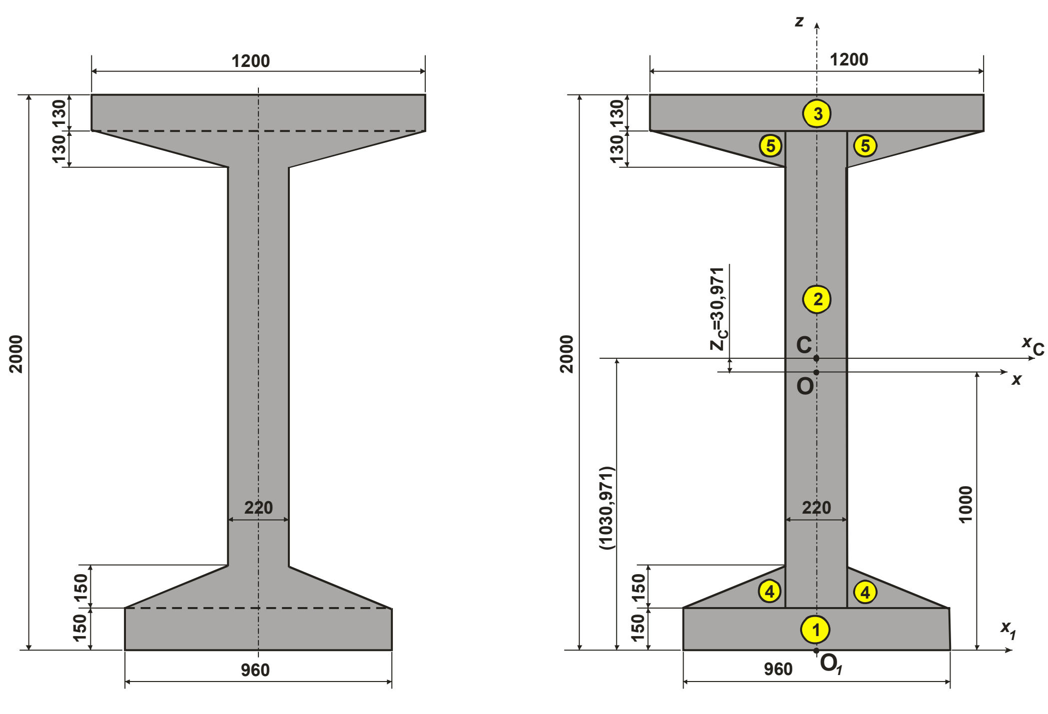

Fig. 3 Grindă de 40 m din beton armat (secțiune)

În figura 4 este prezentat sistemul de axe de coordonate central și principal **Cxyz** și planul vertical-longitudinal de simetrie al grinzii din beton armat.

Matricile caracteristice ale sistemului 6DOF (calculate cu caracteristicile dimensionale, inerțiale ale grinzii și cele elastice ale aparatelor de reazem) sunt următoarele:

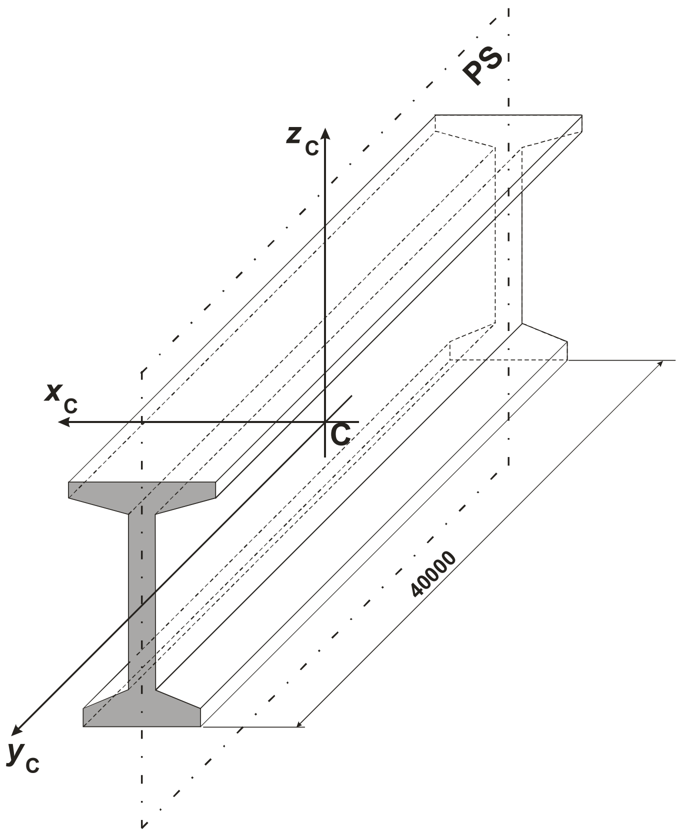

Fig. 4 Grindă de 40 m din beton armat cu plan vertical-longitudinal de simetrie

-matricea de inerție:

$$\underline{A}=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} X & Y & Z & \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{cccccc} \mathbf{82950} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{82950} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{82950} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{11104962} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{49106} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{11064250} \end{array} \right\| & \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{array} \end{array}$$

-matricea de rigiditate:

$$\underline{C}=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} X & Y & Z & \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{cccccc} \mathbf{1540000} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1587695} & \mathbf{-9775000} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1540000} & \mathbf{0} & \mathbf{1587695} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1616000000} & \mathbf{7194400000} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1587695} & \mathbf{7194400000} & \mathbf{61764000000} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{63085268} & \mathbf{10077743} \\ \mathbf{-} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{10077743} & \mathbf{588650408} \end{array} \right\| & \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{array} \end{array}$$

-matricea dinamică $\underline{D} = \underline{A}^{-1} \times \underline{C}$:

$$\underline{D} = \begin{array}{c} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} X & Y & Z & \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \hline \mathbf{18{,}5653} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-19{,}1403} & \mathbf{-117{,}842} \\ \mathbf{0} & \mathbf{18{,}5653} & \mathbf{0} & \mathbf{19{,}1403} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{19481{,}52} & \mathbf{86731{,}3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0{,}142972} & \mathbf{647{,}854} & \mathbf{55618{,}5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-32{,}3317} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1284{,}66} & \mathbf{205{,}222} \\ \mathbf{-0{,}883476} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0{,}910838} & \mathbf{53{,}2029} \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{array}$$

Pulsațiile/frecvențele proprii caracteristice celor 6 moduri proprii de vibrație se determină din ecuația caracteristică (a pulsațiilor proprii):

$$\underline{D} \times \underline{\underline{v_i}} = \lambda_i \underline{\underline{v_i}} \quad i = \overline{1,6}$$

$$det\left(\underline{D} - \lambda I_6\right) = 0 \;\Rightarrow \lambda_i$$

$$p_i = \sqrt{\lambda_i} \qquad f_i = \frac{p_i}{2\pi}$$

În tabelul 1 sunt date, în ordine crescătoare, valorile/pulsațiile/frecvențele proprii determinate prin rezolvarea numerică a ecuației polinomiale a pulsațiilor proprii.

Tabel 1

MPV	λ [s^{-2}]	***p=SQRT(λ)*** [rad/s]	***f=p/(2π)*** [Hz]
1	15,452588	3,93	0,626
2	18,565259	4,31	0,686
3	55,670912	7,46	1,188
4	1285,306441	35,85	5,706
5	17988,322508	134,12	21,346
6	57111,666265	238,98	38,035

Corespunzător celor 6 MPV, matricea modală (a vectorilor proprii normalizați după mișcările de translație din planul orizontal xCy) este:

$$\begin{array}{cc} f\,[\mathrm{Hz}] & \\ \underline{v} & \\ \underline{\Phi}^{*}= & \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathit{0{,}626} & \mathit{0{,}686} & \mathit{1{,}188} & \mathit{5{,}706} & \mathit{21{,}346} & \mathit{38{,}035} \\ \underline{v_1} & \underline{v_2} & \underline{v_3} & \underline{v_4} & \underline{v_5} & \underline{v_6} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0{,}000012} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-54539{,}205} & \mathbf{6880{,}1104} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-0{,}000003} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{938{,}96714} & \mathbf{2985{,}0746} \\ \mathbf{0{,}021775} & \mathbf{0} & \mathbf{0{,}810861} & \mathbf{-65{,}877624} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0{,}022878} & \mathbf{0} & \mathbf{-0{,}328048} & \mathbf{-0{,}049417} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| \end{array}$$

Pentru cele 2 subsisteme cu mişcări cuplate, matricile modale (cu vectorii proprii normalizați) sunt:

1)subsistem cu mişcări cuplate de derapare laterală + ruliu + giraţie $(X, \varphi_y, \varphi_z)$

f [Hz]	*0,626*	*1,188*	*5,706*
$\underline{\underline{v}}$	$\underline{\underline{v}}_1$	$\underline{\underline{v}}_3$	$\underline{\underline{v}}_4$
	1	**1**	**1**
$\underline{\Phi}_1$*=	**0,021775**	**0,810861**	**-65,877624**
	0,022878	**-0,328048**	**-0,049417**

2)subsistem cu mişcări cuplate de înaintare + săltare + tangaj (Y, Z, φ_x)

f [Hz]	*0,686*	*21,346*	*38,035*
$\underline{\underline{v}}$	$\underline{\underline{v}}_2$	$\underline{\underline{v}}_5$	$\underline{\underline{v}}_6$
	1	**1**	**1**
$\underline{\Phi}_2$*=	**0,000012**	**-54539,205**	**6880,1104**
	-0,000003	**938,96714**	**2985,0746**

5. CONCLUZII

►modelarea unui solid rigid cu legături elastice sau vâsco-elastice cu diverse tipuri de simetrii conduce la obţinerea unor sisteme de ecuaţii diferenţiale de mişcare decuplate în subsisteme cu mai puţini coeficienţi de cuplaj şi, deci mai uşor de studiat analitic; în acest fel, pot fi puse în evidenţă influenţele factorilor dimensionali, inerţiali, elastici (eventual şi a celor de amortizare) asupra formelor modurilor proprii de vibraţie [19] [20] [21] [22] [23];
►dacă se poate modela solidul rigid cu simetrii astfel încât mişcările acestuia să se raporteze la un sistem de axe central şi principal, atunci mişcările acestuia după cele şase "direcţii" (X, Y, X, φ_x, φ_y, φ_z) sunt cuplate numai prin intermediul coeficienţilor nediagonali ai matricii de rigiditate (eventual şi prin intermediul amortizărilor dacă sunt semnificative) [22];
♦pentru studiul de caz considerat, se poate constata "gruparea" a trei dintre frecvenţele proprii în zona 0,6÷1,2 Hz, o frecvenţă de circa 5,7 Hz, celelalte 2 frecvenţe fiind mult mai mari decât primele patru şi grupate în intervalul 21-38 Hz; aceasta se poate explica prin diferenţa mare dintre elasticitatea elementelor de rezemare pe verticală (efort de compresiune) faţă de elasticităţile în plan orizontal (solicitări de forfecare) $1: 973$, $1: 1200$;
♦valorile sau foarte mari sau foarte mici ale coeficienţilor vectorilor proprii conduce la concluzia că, în interiorul subsistemelor cu mişcări cuplate, cuplajele sunt "slabe"; în mod real, se poate considera că şi mişcările acestor subsisteme sunt cvasi-decuplate.

BIBLIOGRAFIE

[1] **P. Bratu**, *Vibraţiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 2000

[2] **P. Bratu**, *Analiza structurilor elastice. Comportarea la acțiuni statice și dinamice*, Ed. Impuls, București, 2011

[3] **P. Bratu**, **N. Drăgan**, *Vibraţii mecanice. Aplicaţii*, Ed. Impuls, Bucureşti, 1998

[4] **N. Drăgan**, *Contribuţii la analiza şi optimizarea transportului prin vibraţii - teza de doctorat*,

Universitatea "Dunărea de Jos" din Galaţi, 2002

[5] **P. Bratu**, *Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje*, Ed. Tehnică, București, 1990

[6] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems Dynamics of the Rigid Body with Structural Symmetries. Modal Analysis. Transmitted Forces and Moments*, Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009

[7] **N. Dragan**, *Modal calculus of the reinforced concrete bridges modeled as a rigid solid beared on viscous elastic neoprene supports*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVI, 2010

[8] **N. Dragan**, *Dinamica transportoarelor vibratoare inerţiale*, Ed. Impuls, Bucureşti, 2003

[9] **L. Sakalauskas, N. Dragan, O. Vasile**, *Studies concerning the optimization of the modal analysis of the Bechtel's viaducts – calculus of natural frequencies and eigenvalues*, Romanian Journal of Acoustics and Vibration, Volume VIII, Issue 1, 2011

[10] **N. Dragan, I. Dzemyda**, *The innovative concept of dynamic analysis for the movements of the viaduct modeled as solid body with elastic bearings*, Romanian Journal of Acoustics and Vibration, Volume VIII, Issue 1, 2011

[11] **N. Drăgan**, *Analiza dinamică a solidului rigid cu simetrii structurale rezemat elastic. Studiu de caz – vibraţiile decuplate ale elementelor din beton armat*, Sinteze de mecanică teoretică şi aplicată, Volumul 1 (2010) nr. 2, 2010

[12] **N. Drăgan**, *Analiza dinamică a podurilor din grinzi de beton armat - determinarea modurilor proprii de vibraţie*, Sinteze de mecanică teoretică şi aplicată, Volumul 9 (2018) nr. 4, 2018

[13] **P. Bratu**, **N. Drăgan**, *L'analyse dynamique de l'interaction machine-structure sur la base du modèle equivalent de rigide aux liaisons visco-elastiques*, Analele Universităţii "Dunărea de Jos" din Galaţi, Fascicula XIV, 1997

[14] **P. Bratu**, **N. Drăgan**, *L'analyse des mouvements désaccouplés appliquée au modèle de solide rigide aux liaisons élastiques*, Analele Universităţii "Dunărea de Jos" din Galaţi, Fascicula XIV, 1997

[15] **N. Drăgan**, *Theoretical studies regarding the dynamics of the rigid body with elastic bearings and structural symmetries, excited by harmonical forces and couples*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. VII (XVII), Section Mechanics, 2008

[16] **N. Drăgan**, *Theoretical researches about dynamic forces transmitted to the structure through viscous-elastic bearings by the rigid body with symmetries*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. VII (XVII), Section Mechanics, 2008

[17] **N. Drăgan**, *Some considerations about the dynamics of the reinforced concrete bridges modeled as a rigid solid with viscous-elastic bearings*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. IX (XIX), nr. 3, 2010

[18] **N. Drăgan**, *Considerations on the dynamics of the vertical tower chillers with internal axial flow fan*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI), nr. 2, 2012

[19] **N. Drăgan**, *Modal analysis of the solid rigid with structural symmetries and multiple elastic bearings*, Poster presentation on section "Computational Methods and Mathematical Modeling in Vibration Problems", International Conference on Vibration Problems ICoVP-2011, 5-8 September 2011, Prague, Czech Republic

[20] **N. Dragan**, *Aspects regarding the dynamics of the vibrating conveyors modeled as 3DOF elastic systems*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVIII, 2012

[21] **N. Dragan**, *The dynamic analysis of the inertial vibrating screens modeled as 3DOF elastic systems*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVIII, 2012

[22] **N. Drăgan**, **C.N. Bordea**, *The Dynamics Analysis of the Forced Steady-state for the Vertical Towers Chillers with Internal Axial Flow Fan*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, 2003

[23] **N. Drăgan**, **C.N. Bordea**, **A. Leopa**, **D. Anghelache**, *The dynamic of the forced steady-state vibrations for the vertical towers chillers with axial flow fan*, Proceedings of "trans & MOTAUTO'05+" Conference Veliko Tarnovo 23-25 November 2005, vol. 3 "Mechanics, dynamics, strenght and reliability. Theory of machines and mechanisms", ISBN 954-9322-11-4, Sofia 2005