

STUDIUL PRIVIND INFLUENȚA SENSULUI DE APLICARE A SARCINII UTILE ASUPRA FACTORULUI DE SIGURANȚĂ LA FLAMBAJUL ELASTIC AL UNEI PIESE DE FORMĂ COMPLEXĂ

A BRIEF STUDY CONCERNING THE TENSILE LOAD DIRECTION INFLUENCE VERSUS BUCKLING LOAD MULTIPLIER VALUES, IN THE CASE OF A COMPLEX SHAPED PLATE

Ș.l.univ.dr.ing. Ștefan MOCANU ¹

¹Universitatea Tehnică de Construcții București, Romania
E-mail: mocanustef@gmail.com

Rezumat: Se consideră o piesă de tip placă, de formă complexă, pentru care se cunosc schemele de rezemare și încărcare; este de interes general stabilirea valorii sarcinii critice aplicate asupra acesteia, pentru cele două situații posibile corespunzătoare sensului de aplicație a sarcinii – se consideră că rigiditatea tronsonului median al piesei este identică cu suma rigidităților tronsoanelor exterioare. Abordarea clasică este completată de studiul în baza metodei elementului finit, în scopul verificării și susținerii soluției inițiale așezate.

Cuvinte cheie: flambaj, Euler, placă, element finit, valori proprii

Abstract: A shaped plate is considered to be fixed and loaded as shown in the pictures above; it is of general interest to establish the critical force for the plate in the case of an tensile load P versus the reversed sign of the same load case. The flexural rigidity of the middle part is equal to the sum of the rigidities of the outer parts. The classical approach has been followed by Finite Element Analysis, in order to support the conclusions; natural frequency solvers and buckling solvers typically use the same solution methodology, in both cases we are solving for eigen values which make the stiffness matrix singular (i.e. the structure has zero stiffness) – in the case of a buckling solver, we are looking for values of the load multiplier for which the structure buckles.

Keywords: Euler Buckling, Plate, Finite Element Analysis, Eigenvalues

INTRODUCERE

Dacă se consideră o piesă de tip placă [3], încastrată la extremitatea superioară (fig.1), supusă acțiunii unei sarcini concentrate de valoare P , în două variante de încărcare (fig.1 a, b), este de interes stabilirea mărimii sarcinii critice de flambaj pentru cele două cazuri; rigiditatea tronsonului de mijloc (de dimensiuni $2q, l$), este identică cu suma rigidităților tronsoanelor exterioare (de dimensiuni q, l).

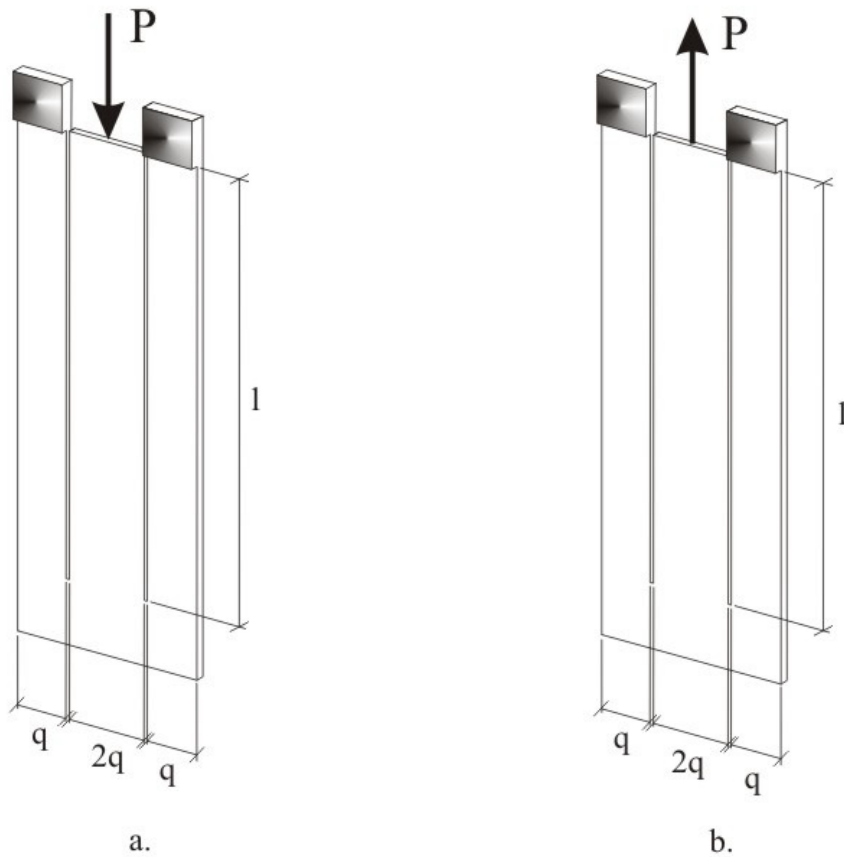


fig.1

1. ABORDARE CLASICĂ. SOLUȚIE ANALITICĂ

Ecuțiile diferențiale aproximative[1,2,6,7], pentru cele două situații de încărcare se exprimă în raport cu punctul de aplicație al sarcinii utile concentrate P, considerat drept origine (fig.2), astfel, în ipoteza deformațiilor mici[1,2,7]:

- pentru sensul pozitiv al sarcinii P (fig.2a.), ecuațiile fibrei medii deformată în cazul celor două tronsoane sunt:

$$EI y_1'' + P y_1 = 0;$$

$$EI y_2'' - P y_2 = 0,$$

în care EI reprezintă rigiditatea la încovoiere (pe direcție defavorabilă) a tronsoanelor în discuție; cu notația $\frac{P}{EI} = \alpha^2$, sistemul de ecuații diferențiale (1.1) devine:

$$y_1'' + \alpha^2 y_1 = 0;$$

$$y_2'' - \alpha^2 y_2 = 0,$$

cu soluțiile[4]:

$$y_1 = A_1 \sin \alpha x + B_1 \cos \alpha x,$$

$$y_2 = A_2 \sinh \alpha x + B_2 \cosh \alpha x.$$

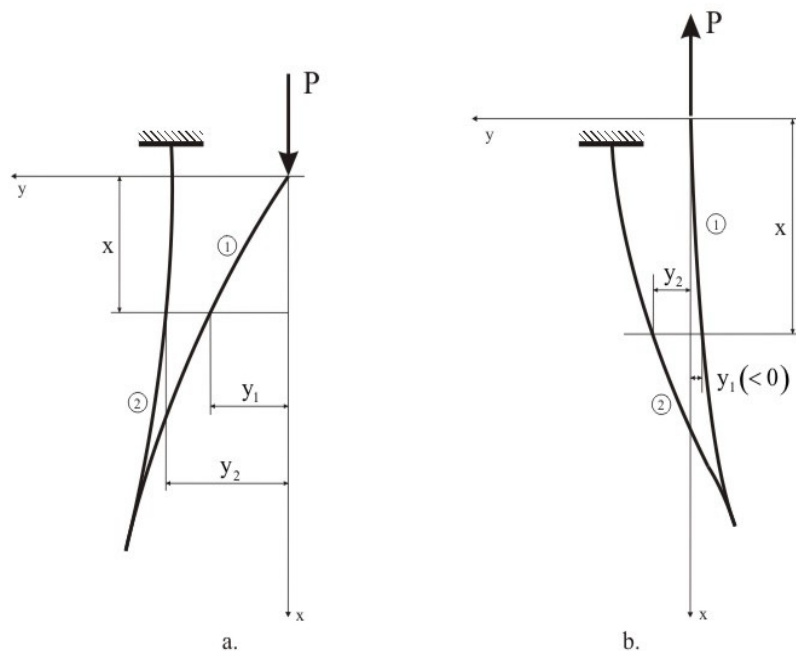


fig.2

Constantele de integrare din relațiile (1.3) se determină din condiții la limită[2,7], astfel:

$$x = 0, y_1 = 0 \Rightarrow 0 = B_1;$$

$$x = 0, y_2' = 0 \Rightarrow 0 = A_2;$$

$$x = l, y_1 = y_2 \Rightarrow A_1 \sin \alpha l = B_2 \cosh \alpha l;$$

$$x = l, y_1' = y_2' \Rightarrow A_1 \cos \alpha l = B_2 \sinh \alpha l.$$

Se ajunge la ecuația transcendentă[4,5], de forma:

$$\tan \alpha l \cdot \tanh \alpha l = 1,$$

cu soluția $\alpha l = 0,938 \text{ rad}$, în concluzie, sarcina critică de flambaj pentru primul caz de solicitare este:

$$P_{cr.}^a = \frac{0,88 EI}{l^2}.$$

- pentru sensul negativ al sarcinii P (fig.2b.) ecuațiile fibrei medii deformate ale celor două tronsoane, scrise în formă aproximativă, sunt:

$$\begin{aligned} EI y_1'' - P y_1 &= 0; \\ EI y_2'' + P y_2 &= 0, \end{aligned}$$

sau, cu aceeași notație $\frac{P}{EI} = \alpha^2$,

$$\begin{aligned} y_1'' - \alpha^2 y_1 &= 0; \\ y_2'' + \alpha^2 y_2 &= 0, \end{aligned}$$

cu soluțiile:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sinh \alpha x + B_1 \cosh \alpha x, \\ y_2 &= A_2 \sin \alpha x + B_2 \cos \alpha x. \end{aligned}$$

Din condiții la limită, constantele de integrare din ecuațiile (1.8) sunt de forma:

$$x = 0, y_1 = 0 \Rightarrow 0 = B_1;$$

$$x = 0, y_2' = 0 \Rightarrow 0 = A_2;$$

$$x = l, y_1 = y_2 \Rightarrow A_1 \sinh \alpha l = B_2 \cos \alpha l;$$

$$x = l, y_1' = y_2' \Rightarrow A_1 \cosh \alpha l = -B_2 \sin \alpha l.$$

Se obține ecuația transcendentă:

$$\tan \alpha l \cdot \tanh \alpha l = -1,$$

satisfăcută de soluția $\alpha l = \pm 2,35 \text{ rad}$, sarcina critică pentru cel de-al doilea caz de solicitare fiind:

$$P_{cr.}^b = \frac{5,53 EI}{l^2}.$$

2. SOLUȚIE NUMERICĂ. CONCLUZII

Pentru stabilirea modului în care ipotezele simplificatoare de calcul admise în studiul modelului propus (deformații la încovoiere – ecuația fibrei medii deformată în formă aproximativă), pot conduce la afectarea soluțiilor finale, a fost parcursă secvența de calcul pentru un exemplu numeric ales ($q = 12 \text{ mm}$, $l = 180 \text{ mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$), cu ajutorul unui program de calcul ce utilizează metoda elementului finit (FEA); dimensiunea relativ mare a lungimii decupajelor „I” se datorează dorinței de situare în zona elastică de flambaj (Euler)[7], pentru flambaj post-elastic sau plastic fenomenul fiind greu de cuantificat (zona se pretează la relații experimental-empirice gen Tetmajer-Iasinski)[2,6,7].

În genere, marea majoritate a programelor de calcul utilizează același aparat matematic de rezolvare atât în cazul studiului frecvențelor proprii de rezonanță cât și pentru flambajul în domeniul elastic (Euler); scopul este reprezentat de găsirea de valori proprii (soluții) distincte (din lb. germană, eigenvalues), pentru care se obține o matrice rigiditate singulară (rigiditate globală a structurii, nulă). În cazul particular al pierderii formei de echilibru elastic, se caută valorile sarcinii critice de flambaj (pentru care se prognozează apariția fenomenului), în speță, valoarea coeficientului de siguranță la flambaj.

Modelarea pornește de la o ecuație de echilibru scrisă de forma:

$$P = (K + K_G) \Delta, \quad (2.1)$$

în care K_G reprezintă matricea rigiditate; pentru o creștere incrementală a sarcinii P_i careia îi corespunde o creștere incrementală a deformației Δ_i , ecuația (2.1) este valabilă pentru o matrice rigiditate K_G estimată pentru starea curentă de deformare a structurii. Condiția de sarcină critică se obține pentru situația în care va exista o deformată diferită de zero **fără** creștere incrementală a sarcinii, astfel, ecuația de echilibru devine:

$$0 = (K + K_G) \Delta_i, \quad (2.2)$$

cu $\Delta_i \neq 0$ (creștere incrementală a deformației diferită de zero din condiții inițiale); criteriul matematic de flambaj este $\det(K + K_G) = 0$.

Sarcina curentă poate fi exprimată ca un produs scalar între sarcina inițială și un coeficient, astfel:

$$P_i = c_i \cdot P, \Rightarrow K_G = c_i \cdot K_{G_0}, \quad (2.3)$$

forma particulară a ecuației de echilibru devenind:

$$0 = (K + c_i K_{G_0}) \Delta_i. \quad (2.4)$$

Sarcina critică de flambaj este dată de produsul dintre cea mai mică valoare proprie a soluției ecuației de mai sus și sarcina inițială, $P_{cr.} = c \cdot P$.

Se definește drept coeficient de siguranță la flambaj (buckling load factor), raportul:

$$c = \frac{P_{cr.}}{P}, \quad (2.5)$$

în care $P_{cr.}$ reprezintă valoarea sarcinii pentru care structura „a flambat sau va flamba”(sarcină critică de flambaj)[7], iar P valoarea sarcinii efectiv aplicate.

Valoarea coeficientului de siguranță la flambaj determinată cu ajutorul programului de calcul va indica probabilitatea (relativă) de producere a fenomenului de pierdere a stabilității, astfel, pentru $c > 1$ - sarcina aplicată este inferioară sarcinii critice de flambaj(fenomenul nu se produce), $c \in (0,1]$ - sarcina efectivă depășește valoarea sarcinii critice de flambaj (probabilitate ridicată de producere a fenomenului), iar pentru $c < 0$ sarcina efectiv aplicată tinde să crească rigiditatea globală a structurii prin solicitare de întindere (fenomenul nu se produce); o valoare negativă a coeficientului de siguranță la flambaj indică o probabilitate mare de apariție a fenomenului doar în cazul aplicării aceleiași sarcini în direcție opusă, în plus algoritmul recomandând alegerea unor moduri proprii suplimentare de flambaj (buckling modes) cu alegerea modului de flambaj corespunzător celui mai mic coeficient de siguranță pozitiv.

Astfel, pentru sensul pozitiv de aplicare a sarcinii (P comprimă tronsonul de mijloc al structurii, fig.1a.), sarcina critică de flambaj, conform relației (1.5), se va exprima:

$$P_{cr.}^a = \frac{0,88 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{24 \cdot 3^3}{12}}{180^2}; \quad P_{cr.}^a = 308 \text{ N}, \quad (2.6)$$

admițându-se o grosime a peretelui plăcii de 3mm. După parcurgerea secvenței de calcul, coeficientul de siguranță obținut are valoarea estimată de 0,943 (fig.3), valoare în concordanță cu rezultatele studiului analitic (valoarea ideală ar fi fost de 1,00 – P reprezintă chiar sarcina critică de flambaj).

Pentru sensul negativ de aplicare a sarcinii utile (P întinde tronsonul median al structurii, fig.1b.), conform soluției (1.10), valoarea sarcinii critice de flambaj va fi dată de:

$$P_{cr.}^b = \frac{5,53 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{24 \cdot 3^3}{12}}{180^2}; \quad P_{cr.}^b = 1935,5 \text{ N}, \quad (2.7)$$

pentru aceleași date geometrice ale piesei.

Diferența substanțială între valorile sarcinii critice de flambaj obținute pentru cele două cazuri de încărcare poate fi motivată de efectul de întindere – rigidizare a structurii, având drept consecință o creștere a rigidității globale a piesei pentru varianta a II-a de încărcare (fig.1b.).

Parcurgerea etapei de simulare pentru varianta a doua de încărcare (fig.4), are drept rezultat un coeficient de siguranță la flambaj de 0,93, valoare suficient de apropiată de unitate, pentru a putea confirma soluția analitică adoptată.

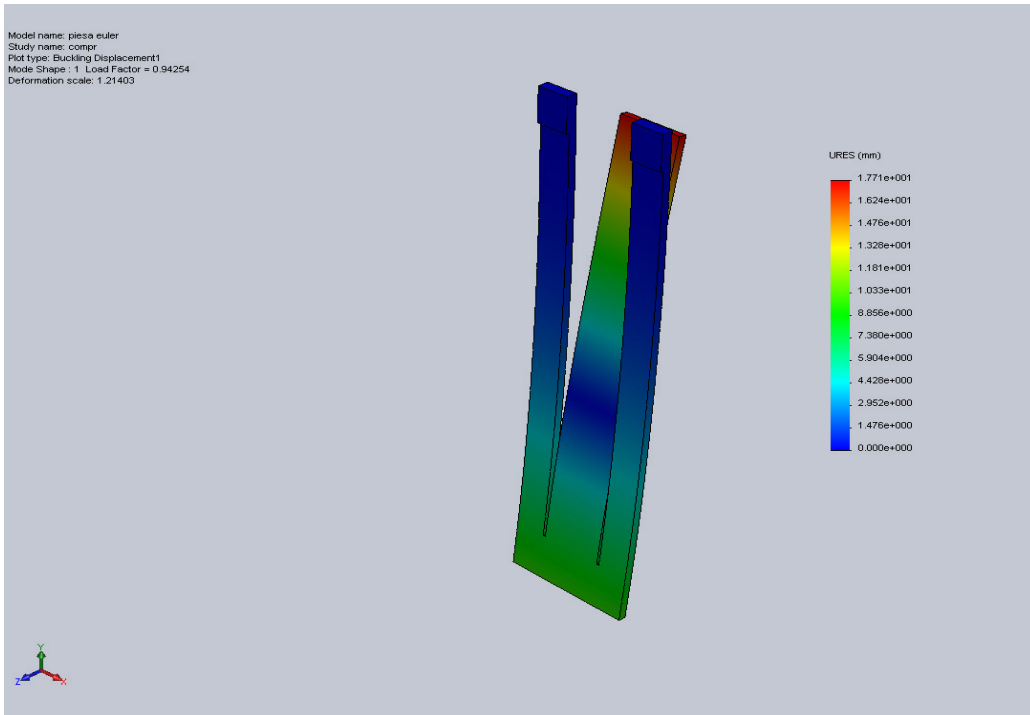


fig.3

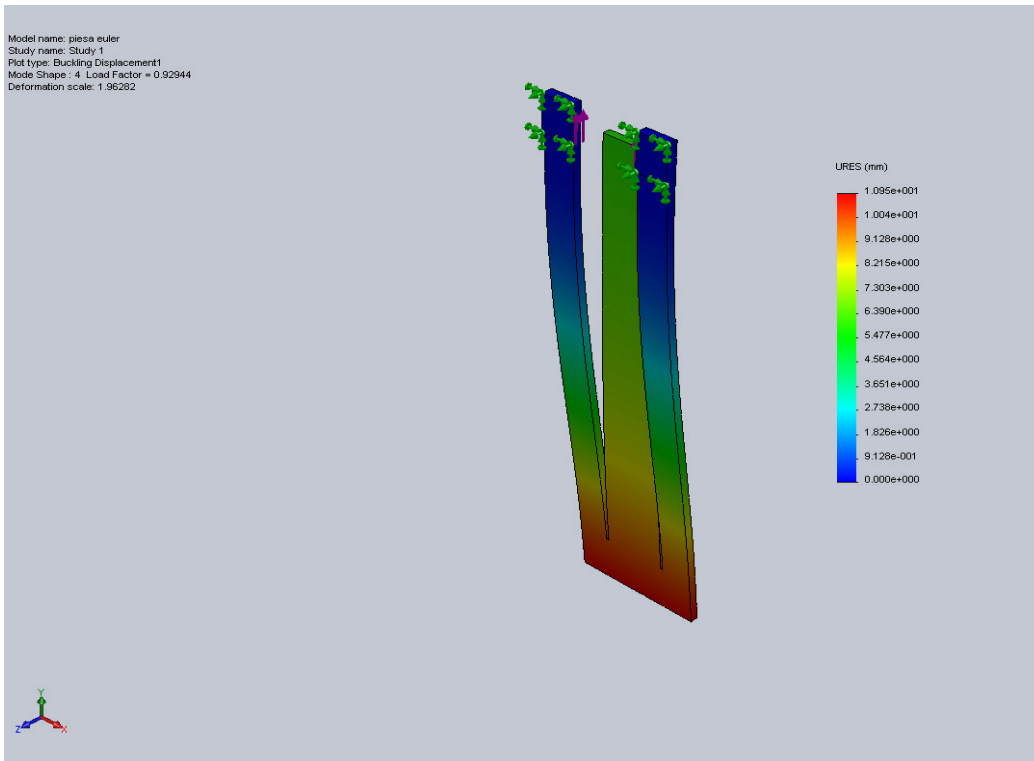


fig.4

Pe lângă criteriul general de apariție a flambajului, rezultatele simulării prin metoda Finite Element Analysis – FEA permit verificarea calitativă a corectitudinii formei deformată corespunzătoare modului de flambaj caracteristic structurii, formă deformată în baza căreia au fost calculate soluțiile studiului analitic (fig.2a.,b.), precum și ipoteza de calcul conform căreia studiul se situează în zona deformațiilor mici (fig.3,4).

BIBLIOGRAFIE

- [1] **Deutsch I.** – Rezistența materialelor, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [2] **Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.** – Rezistența materialelor, vol.II, Institutul de Construcții București, 1981.
- [3] **Feodosiev V.I.** – Selected problems and questions in Strength of Materials, MIR Publishers Moscow, 1977.
- [4] **Luzin N.N.** – Calcul diferențial, Editura Tehnică, București, 1954.
- [5] **Vigodski M.** – Mathematical Handbook, MIR Publishers Moscow, 1975.
- [6] **Popov E.P.** – Mechanics of Materials, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [7] **Andreescu I., Mocanu Șt.** – Compendiu de Rezistența Materialelor, Matrix Rom, București, 2005.