

**ASUPRA MIȘCĂRII UNEI PLĂCI OBLIGATĂ SĂ SE MIȘTE CU
FRECARE PESTE O CURBĂ FIXĂ
ON THE MOTION OF A PLATE FORCED TO MOVE WITH FRICTION OVER A
FIXED CURVE**

**Drd.ing. Ogaru SĂNDEL¹
Prof.univ.dr.ing. Pandrea NICOLAE²**

¹Universitatea din Pitești, Romania
E-mail: xande_ing@yahoo.com

²Universitatea din Pitești, Romania
E-mail: seby@linux.math.upit.ro

***Rezumat:** Se tratează rostogolirea cu alunecare a unei curbe convexe peste o altă curbă convexă fixă. Ecuațiile diferențiale ale mișcării sunt obținute din teoremele generale adaptate mișcării plăcii și din matricea constrângerilor care diferă de la un caz la altul.*

***Cuvinte cheie:** legături cu constrângeri, matricea constrângerilor, dinamica multicorp*

***Abstract:** It is treated in fact the rolling with sliding of a convex curve over another fixed convex curve. The differential equations of the motion are obtained from general theorems adapted to the motion of the plate and from constraint matrix which is different from case to case.*

***Keywords:** links with constraints, constraints matrix, multibody dynamics*

1. INTRODUCERE

Pentru stabilirea modelelor matematice ale calculului dinamic numeric al sistemelor multicorp [5] se utilizează fie teoremele generale ale mecanicii, fie ecuațiile lui Lagrange. Echivalența analitică dintre cele două modele conduce la utilizarea unor proprietăți ale matricelor vitezelor unghiulare ale solidului, proprietăți ce se vor stabili în prezenta lucrare.

2. ASPECTE CINEMATICE. NOTAȚII

Se consideră placa mobilă cu centrul de greutate O , de masă m și moment de inerție J față de punctul O , mărginită de curba Γ (Fig.1) care se rostogolește cu sau fără alunecare peste o curbă convexă fixă Γ_0 și fie O_0XY sistemul de referință fix, iar Oxy sistemul de referință mobil solidar cu placa poziționat față de sistemul fix prin coordonatele (X_0, Y_0) și prin unghiul θ .

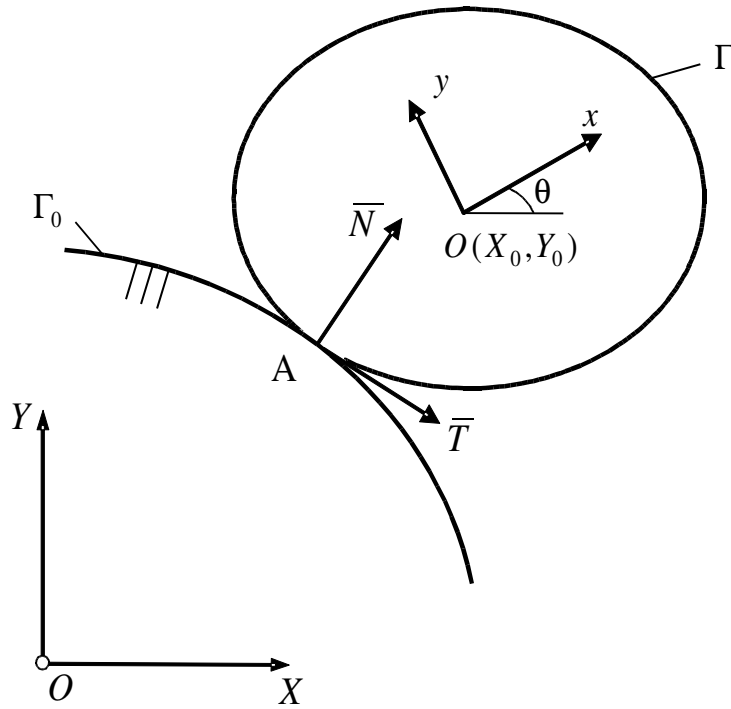


Fig.1. Placa mobilă peste o curbă fixă

Se consideră de asemenea definite coordonatele parametrice față de sistemul fix ale curbei Γ_0 , $X(\xi_1)$, $Y(\xi_1)$ și derivatele acestora în raport cu parametrul ξ_1 până la ordinul trei (X_p, Y_p) , (X_s, Y_s) , (X_t, Y_t) , precum și coordonatele parametrice față de sistemul mobil $x(\xi_2)$, $y(\xi_2)$ ale curbei Γ și derivatele acestora în raport cu parametrul ξ_2 până la ordinul trei (x_p, y_p) , (x_s, y_s) , (x_t, y_t) .

Utilizând pentru început notațiile:

$$\{\mathbf{R}\} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}; \{\mathbf{R}_p\} = \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \end{bmatrix}; \{\mathbf{R}_s\} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \end{bmatrix}; \{\mathbf{R}_t\} = \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\{\mathbf{r}\} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \{\mathbf{r}_p\} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}; \{\mathbf{r}_s\} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix}; \{\mathbf{r}_t\} = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\{\boldsymbol{\theta}\} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}; \{\mathbf{R}_0\} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$[\mathbf{I}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; [\mathbf{0}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; [\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

condiția de contact între curbele Γ_0 și Γ din punctul A se transcrie în relația:

$$\{\mathbf{R}\} = \{\mathbf{R}_0\} + [\boldsymbol{\theta}] \cdot \{\mathbf{r}\}, \quad (5)$$

iar condiția de tangență se transcrie în relația

$$\{\mathbf{R}_p\}^T \cdot [\mathbf{U}] \cdot [\boldsymbol{\theta}] \cdot \{\mathbf{r}_p\} = 0. \quad (6)$$

Prin derivarea în raport cu timpul a relațiilor (4), (5) și ținând seama de egalitățile

$$[\dot{\boldsymbol{\theta}}] = \dot{\theta} \cdot [\mathbf{U}] \cdot [\boldsymbol{\theta}]; [\mathbf{U}^2] = -[\mathbf{I}_2]. \quad (7)$$

se obțin expresiile

$$-\dot{\xi}_1 \cdot \{\mathbf{R}_p\} + \{\dot{\mathbf{R}}_0\} + \dot{\theta} \cdot [\mathbf{U}] \cdot [\boldsymbol{\theta}] \cdot \{\mathbf{r}\} + \dot{\xi}_2 \cdot [\boldsymbol{\theta}] \cdot \{\mathbf{r}_p\} = \{\mathbf{0}\}; \quad (8)$$

$$-\dot{\theta} \cdot \{\mathbf{R}_p\}^T \cdot [\boldsymbol{\theta}] \cdot \{\mathbf{r}_p\} + \dot{\xi}_1 \cdot \{\mathbf{R}_s\}^T \cdot [\mathbf{U}] \cdot [\boldsymbol{\theta}] \cdot \{\mathbf{r}_p\} + \dot{\xi}_2 \cdot \{\mathbf{R}_p\}^T \cdot [\mathbf{U}] \cdot [\boldsymbol{\theta}] \cdot \{\mathbf{r}_s\} = \{\mathbf{0}\} \quad (9)$$

Viteza din punctul de contact, de componente (v_x, v_y) , scrisă matriceal sub forma

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad (10)$$

pe baza relației (8), poate avea una din formele

$$\{\mathbf{v}\} = \{\dot{\mathbf{R}}_0\} + \dot{\theta} \cdot [\mathbf{U}] \cdot [\boldsymbol{\theta}] \cdot \{\mathbf{r}\}, \quad (11)$$

$$\{\mathbf{v}\} = \dot{\xi}_1 \cdot \{\mathbf{R}_p\} - \dot{\xi}_2 \cdot [\boldsymbol{\theta}] \cdot \{\mathbf{r}_p\}, \quad (12)$$

și are același sens cu vectorul de componente (X_p, Y_p) dacă

$$\{\mathbf{R}_p\}^T \cdot \{\mathbf{v}\} > 0, \quad (13)$$

respectiv de sens contrar dacă

$$\{\mathbf{R}_p\}^T \cdot \{\boldsymbol{\theta}\} < 0. \quad (14)$$

3. ECUAȚIILE DINAMICE GENERALE ALE MIȘCĂRII

În cazul mișcării discului mărginit de curba Γ peste placa mărginită de curba Γ_0 (Fig. 1), forțele de legătură din punctual de contact A sunt reacțiunea normală \bar{N} de componente N_x, N_y în sistemul O_0XY și reacțiunea tangențială \bar{T} de componente T_x, T_y în sistemul O_0XY .

Dacă torsorul forțelor exterioare care acționează asupra discului mobil are componentele în sistemul fix (F_x, F_y, M_0) atunci din teoremele generale ale dinamicii [2], în absența frecării de rostogolire se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{X}_0 &= F_x + N_x + T_x; \\ m \cdot \ddot{Y}_0 &= F_y + N_y + T_y; \\ J \cdot \ddot{\theta} &= M_0 + (X - X_0) \cdot (N_y + T_y) - (Y - Y_0) \cdot (N_x + T_x), \end{aligned} \quad (15)$$

care, cu ajutorul notațiilor

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}; \{\mathbf{q}_1\} = (X_0, Y_0, \theta)^T, \quad (16)$$

$$\{\mathbf{N}\} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_y \cdot (X - X_0) - N_x \cdot (Y - Y_0) \end{bmatrix}; \{\mathbf{T}\} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_y \cdot (X - X_0) - T_x \cdot (Y - Y_0) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\{\mathbf{F}_L\} = \{\mathbf{N}\} + \{\mathbf{T}\}, \quad (18)$$

se transcriu în ecuația matriceală

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\mathbf{q}}\} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}_L\}, \quad (19)$$

unde prin $\{\mathbf{F}_L\}$ s-a notat matricea componentelor torsorului rezultat al forțelor de legătură (matricea forțelor de legătură).

Matricea forțelor de legătură, ținând seama de expresia (5), se poate scrie și sub forma

$$\{\mathbf{F}_L\} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_y \cdot (X - X_0) - N_x \cdot (Y - Y_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_y \cdot (X - X_0) - T_x \cdot (Y - Y_0) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

iar într-o exprimare mai generală [1], [3], se pot scrie și sub forma

$$\{\mathbf{F}_L\} = [\mathbf{A}] \cdot \{\boldsymbol{\lambda}\}, \quad (21)$$

unde matricea $[\mathbf{A}]$ depinde de parametrii cinematici $(X_0, Y_0, \theta, \xi_1, \xi_2)$, iar $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ reprezintă matricea coloană a unor parametrii ce definesc forțele de legătură.

În acest fel, ecuația diferențială matriceală dinamică (19) devine:

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\mathbf{q}}_1\} = \{\mathbf{F}\} + [\mathbf{A}] \cdot \{\boldsymbol{\lambda}\}, \quad (22)$$

și conține trei ecuații scalare.

La ecuația matriceală (22) se adaugă ecuația matriceală a constrângerilor cinematice care [1], [3] este de forma

$$[\mathbf{B}] \cdot \{\dot{\mathbf{q}}_1\} + [\mathbf{D}] \cdot \{\dot{\mathbf{q}}_2\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (23)$$

Unde

$$\{\mathbf{q}_2\} = (\xi_1 \quad \xi_2)^T, \quad (24)$$

iar matricele $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{D}]$ depind de parametrii cinematici $(X_0, Y_0, \theta, \xi_1, \xi_2)$.

Prin derivarea în raport cu timpul a relației (23) și prin utilizarea notației

$$\{\mathbf{C}\} = -[\dot{\mathbf{B}}] \cdot \{\dot{\mathbf{q}}_1\} - [\dot{\mathbf{D}}] \cdot \{\dot{\mathbf{q}}_2\}, \quad (25)$$

se obține ecuația

$$[\mathbf{B}] \cdot \{\ddot{\mathbf{q}}_1\} + [\mathbf{D}] \cdot \{\ddot{\mathbf{q}}_2\} = \{\mathbf{C}\}. \quad (26)$$

Ecuațiile (22) și (26) se reunesc în ecuația finală

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & [\mathbf{0}_{mn}] & -[\mathbf{A}] \\ [\mathbf{B}] & [\mathbf{D}] & [\mathbf{0}_{n_2n_1}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{\ddot{\mathbf{q}}_1\} \\ \{\ddot{\mathbf{q}}_2\} \\ \{\lambda\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{C}\} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

din care se derivează, prin calcul numeric funcțiile de timp $\{q_1(t)\}$, $\{q_2(t)\}$, $\{\lambda(t)\}$.

În ecuația (27) prin $[\mathbf{0}_{mn}]$ s-a notat matricea nulă cu m linii și n coloane, prin n_1 s-a notat numărul de coloane ale matricei $[\mathbf{A}]$, iar prin n_2 s-a notat numărul de linii ale matricelor $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{D}]$.

4. CAZUL LEGĂTURII CU FRECARĂ DE ALUNECARE

4.1. ASPECTE TEORETICE

În acest caz forța de frecare de alunecare \bar{T} (fig.1) este situată pe tangenta la curbă, de sens opus vitezei de alunecare și îndeplinește condiția

$$|T| = \mu_0 \cdot N, \quad (28)$$

unde μ_0 este coeficientul de frecare de alunecare.

Dacă se admite că parametrul λ este pozitiv atunci pe baza expresiilor (12), (13), (14) se pot scrie relațiile

$$T_x = \lambda \cdot \mu \cdot X_p; T_y = \lambda \cdot \mu \cdot Y_p, \quad (29)$$

Unde

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 & \text{if } \{\mathbf{R}_p\}^T \cdot \{v\} < 0 \\ -\mu_0 & \text{if } \{\mathbf{R}_p\}^T \cdot \{v\} > 0 \end{cases} \quad (30)$$

În acest fel forța totală de legătură are componentele

$$\lambda \cdot (-Y_p + \mu \cdot X_p \quad X_p + \mu \cdot Y_p) \quad (31)$$

și cu notațiile

$$[\tilde{\mathbf{U}}] = [\mathbf{U}] - \mu \cdot [\mathbf{I}_2]; \{\tilde{\mathbf{R}}_p\} = [\tilde{\mathbf{U}}] \cdot \{\mathbf{R}_p\}, \quad (32)$$

$$[\tilde{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{U}] \cdot \{\tilde{\mathbf{R}}_p\} \\ \{\tilde{\mathbf{R}}_p\}^T \cdot [\boldsymbol{\theta}] \cdot \{\mathbf{r}\} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

se deduce

$$\{\mathbf{F}_L\} = [\tilde{\mathbf{A}}] \cdot \lambda. \quad (34)$$

Pe parcursul calculelor se testează semnul parametrului λ deoarece în cazul legăturii unilaterale, la schimbarea semnului se produce desprinderea.

4.2. APLICAȚIE

Pentru discul circular din fig.2 să se determine variația în timp a parametrilor v , ξ_1 , ξ_2 , θ , λ , în aceleași condiții inițiale considerând pentru coeficientul de frecare de alunecare valorile $\mu_0 = 0.01$; 0.1 ; 0.2 .

În acest caz, prin calcul direct se deduc expresiile:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= \frac{g}{R-r} \cdot (\cos \xi_1 - \mu_0 \cdot \sin \xi_1) - \mu_0 \cdot \dot{\xi}_1^2; \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2 \cdot \mu_0}{r} \cdot [g \cdot \sin \xi_1 + (R-r) \cdot \dot{\xi}_1^2]; \\ N &= m \cdot [g \cdot \sin \xi_1 + (R-r) \cdot \dot{\xi}_1^2]; \quad v = (R-r) \cdot \dot{\xi}_1^2 + r \cdot \dot{\theta}; \\ \xi_2 &= \xi_1 - \theta, \end{aligned} \quad (35)$$

unde v este viteza de alunecare.

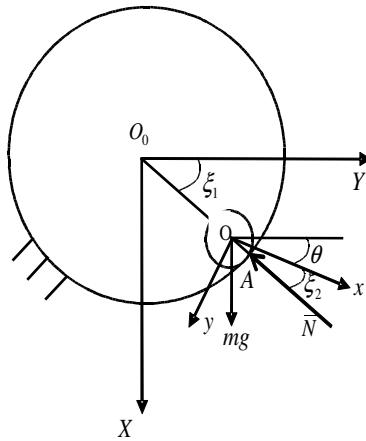


Fig.2. Aplicație

Din momentul în care viteza de alunecare se anulează mișcarea discului devine de rostogolire fără alunecare, iar modelul matematic pentru acest caz se va stabili ulterior.

Pe baza rezultatelor numerice obținute pentru parametrii v , ξ_1 , ξ_2 , θ , λ s-au trasat diagramele de variație pe intervalul de timp până la care viteza de alunecare se anulează, iar mișcarea devine de rostogolire pură.

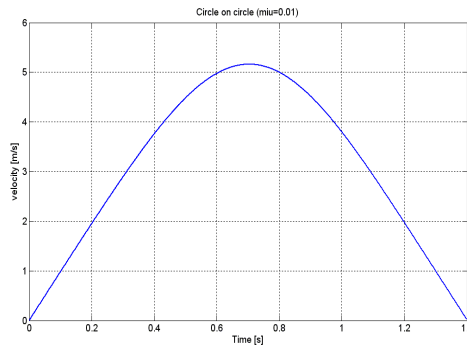


Fig.3. Variația în timp a parametrului v când $\mu_0 = 0.01$

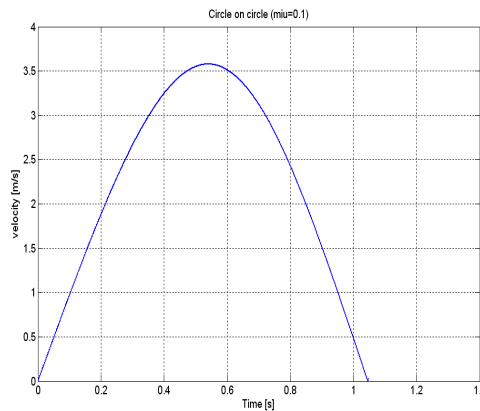


Fig. 4. Variația în timp a parametrului v când $\mu_0 = 0.1$

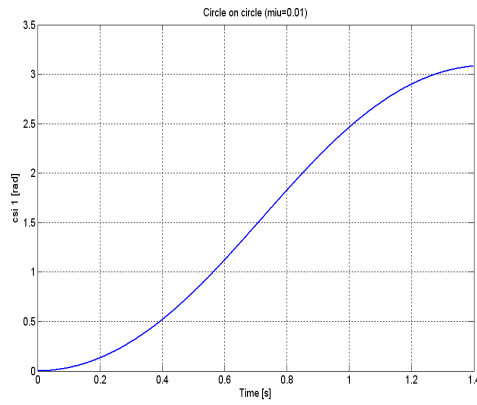


Fig. 5. Variația în timp a parametrului ξ_1 când $\mu_0 = 0.01$

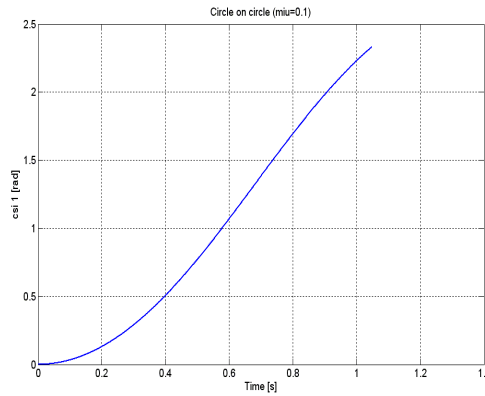


Fig. 6. Variația în timp a parametrului ξ_1 când $\mu_0 = 0.1$

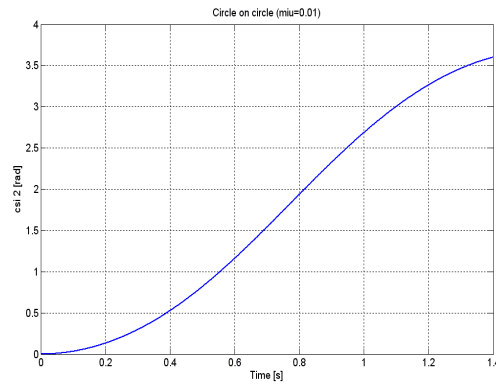


Fig. 7. Variația în timp a parametrului ξ_2 când $\mu_0 = 0.01$

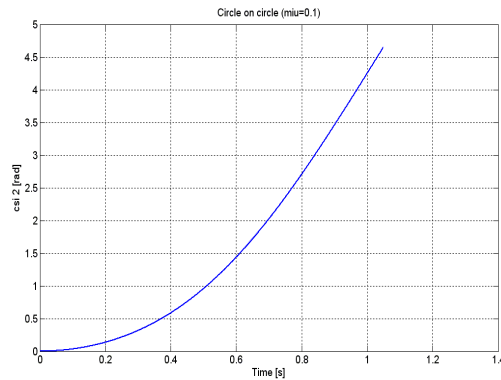


Fig. 8. Variația în timp a parametrului ξ_2 când $\mu_0 = 0.1$

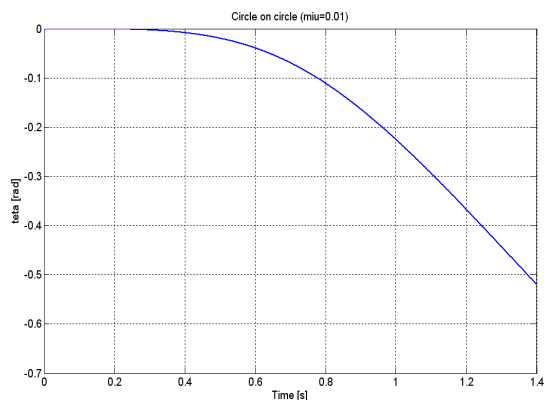


Fig. 9. Variația în timp a parametrului θ când $\mu_0 = 0.01$

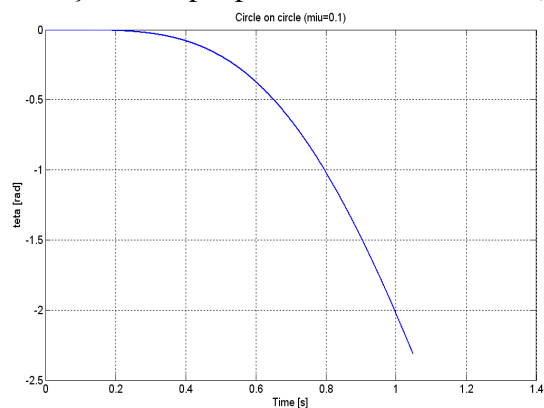


Fig. 10. Variația în timp a parametrului θ când $\mu_0 = 0.1$

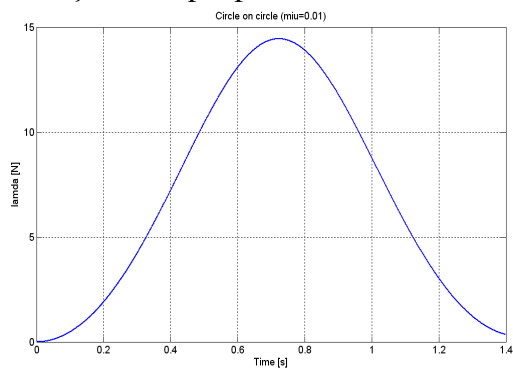


Fig. 11. Variația în timp a parametrului λ când $\mu_0 = 0.01$

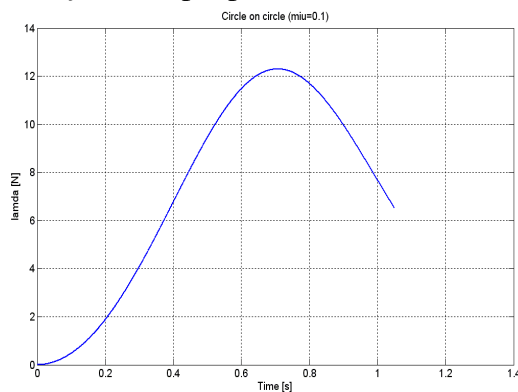


Fig. 12. Variația în timp a parametrului λ când $\mu_0 = 0.1$

Se constată că odată cu creșterea coeficientului de frecare de alunecare (fig. 3, 4), timpul până la care viteza de alunecare se anulează scade și de asemenea scade și unghiul ξ_1 (fig. 5, 6), care poziționează centrul discului în momentul în care se termină rostogolirea cu alunecare și începe rostogolirea pură

Bibliografie:

- [1] **Amironache, F.**, *Fundamentals of multibody dynamics*, Birkhöser, Boston, Basel, Berlin, 2004;
- [2] **Pandrea, N.**, *Elemente de mecanica solidului în coordonate plöckeriene*, Editura Academiei Române, București, 2000;
- [3] **Shabana, A., A.**, *Dinamics of multibody systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005;
- [4] **Wittemberg, J.**, *Dynamics of multibody system*, Springer, Berlin, 2008.