

METODĂ MATRICEALĂ PENTRU CALCULUL FORȚEI CRITICE DE FLAMBAJ AL UNEI COLOANE CU UNUL ȘI DOUĂ REAZEME INTERMEDIARE

CALCULUS OF CRITICAL LOAD OF COLUMNS BUCKLING USING MATRICIAL AND NUMERICAL METHODS

Prof. dr. ing. Cornel MARIN¹

¹Universitatea VALAHIA din Târgoviște, Romania
E-mail: marin_cor@yahoo.com

Rezumat: Studiul deformațiilor barelor în domeniul liniar elastic supuse la compresiune, necesită totdeauna scrierea ecuațiilor de stabilitate a echilibrului elastic. O structură este stabilă dacă la o modificare finită a condițiilor inițiale nu au loc schimbări foarte mari ale soluției de echilibru inițial, în caz contrar structura astfel încărcată este nestabilă. Comportarea unei coloane supusă la compresiune se raportează la cazul clasic al coloanei EULER ce reprezintă o bară perfect dreaptă articulată la capete, dintr-un material omogen, liniar elastic, cu secțiune constantă având o axă de simetrie, bara fiind supusă la o forță de compresiune dirijată după axa barei ce trece prin centrele de greutate ale secțiunii. Scopul acestei lucrări este de a prezenta modul în care se obțin matricile de rigiditate K_{ff} și K_{ϕ} pentru o bară supusă la compresiune având capetele rigide sau articulato-rigide, pentru a putea scrie relațiile matriceale între forțele/cuplurile și deplasările capetelor. De asemenea sunt prezentate exemple de calcul a forțelor critice pentru două coloane cu unul și respectiv două reazeme intermediare folosind programul MATHCAD

Cuvinte cheie: calculul forței critice de flambaj, coloane cu reazeme intermediare

Abstract: The study of deformable linear beam subjected to compression required always the stability equilibrium equations. A structure is stable if a finite change in the initial conditions does not produced an infinite change in the solution, otherwise the structure is unstable. The classic elastic behaviour of the column subjected to a compressive force is referred as the Idel Euler Column: a perfect starin beam, made of a homogeneous linearly elastic material, with a constant cross-section having a simmetrical shape, subjected to compressive force along centroids cross-section axis. The aim of this paper is to explain the build of stiffness matrix K_{ϕ} and K_{ff} of Fixed-Fixed Beam Column respectivley Fixed-Hinged Beam Column to obtain the relation between reactions and end-degrees of freedom. In the paper are presents also two applicatins of this matriceal method for calculus of critical load buckling P/P_E corresponding to column with one and two pin, using MATHCAD programm.

Keywords: compressive force, critical load, MATHCAD programm

1. RELAȚII MATRICEALE PENTRU CALCULUL SISTEMELOR DE BARE CU NODURI RIGIDE

Pentru un element de bară sudat la capete (cu noduri rigide), delimitat de nodurile 1 și 2, având lungimea L , rigiditate la întindere-compresiune EA , rigiditate la încovoiere EI se consideră un sistem de axe de local $O_1\bar{x}\bar{y}$ astfel încât axa $O_1\bar{x}$ să coincidă inițial cu axa barei.

a. În zona stabilității elastice a **barei cu noduri rigide**, sub acțiunea sarcinilor exterioare și a forțelor de legătură din noduri, au loc atât deformații ale elementului cât și deplasări liniare sau unghiulare ale capetelor (nodurilor rigide), notate cu: $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{\varphi}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{\varphi}_2$ (fig.1).

Prin izolarea elementului față de cele două noduri se introduc forțele și cuplurile de forțe nodale notate cu (fig.1):

$$\bar{F}_{x1}^e, \bar{F}_{y1}^e, \bar{M}_{z1}^e, \bar{F}_{x2}^e, \bar{F}_{y2}^e, \bar{M}_{z2}^e .$$

Relația matriceală între forțele și cuplurile de forțe și deplasările liniare/unghiulare nodale ale capetelor 1 și 2 au fost deduse [1], [3] și au următoarea formă:

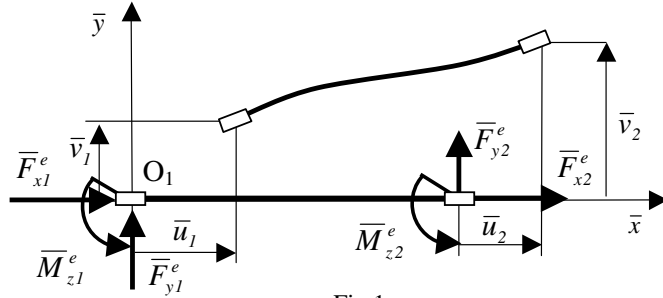


Fig.1.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1}^e \\ \bar{F}_{y1}^e \\ \bar{M}_{z1}^e \\ \bar{F}_{x2}^e \\ \bar{F}_{y2}^e \\ \bar{M}_{z2}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Dacă se notează $EAL^2/EI = \alpha$ atunci relația matriceală (1) se mai poate scrie sub forma:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1}^e \\ \bar{F}_{y1}^e \\ \bar{M}_{z1}^e/L \\ \bar{F}_{x2}^e \\ \bar{F}_{y2}^e \\ \bar{M}_{z2}^e/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1/L \\ \bar{v}_1/L \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{u}_2/L \\ \bar{v}_2/L \\ \bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

În cazul particular al unei grinzi continue, supusă doar la încovoiere și forfecare (fără eforturi axiale) relația matriceală (2) se scrie sub forma:

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_1/L \\ \bar{V}_1 \\ \bar{M}_2/L \\ \bar{V}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & -6 \\ 6 & 12 & 6 & -12 \\ 2 & 6 & 4 & -6 \\ -6 & -12 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ v_1/L \\ \varphi_2 \\ v_2/L \end{Bmatrix} \quad (3)$$

- b. În zona instabilității elastice a barei drepte **articulată la un capăt și rigidă la celălalt** (fig.2), solicitată cu forța axială P , funcțiile deplasărilor $v(x)$, ale rotirilor $\varphi(x)$ și eforturilor încovoietoare $M_i(x)$ sunt date [2] de expresiile:

$$\begin{aligned} v(x) &= C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3x + C_4 \\ \varphi(x) &= kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx + C_3 \\ M_i(x) &= EIv''(x) = -k^2EI(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) \end{aligned} \quad (4)$$

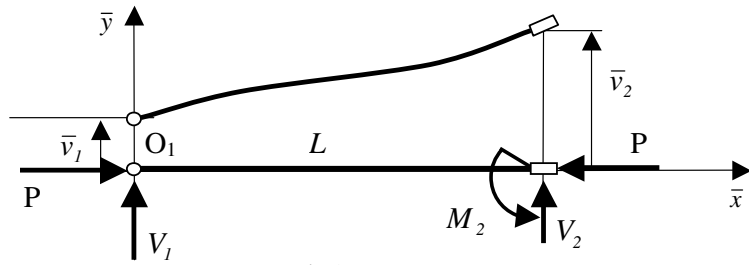


Fig.2

Constantele C_1 , C_2 , C_3 și C_4 din relațiile (4) se determină din condițiile la limită:

$$\begin{aligned}
 v(0) = v_1 = C_2 + C_4 & \quad C_2 = 0 \\
 M_i(0) = 0 = -k^2 EI \cdot C_2 & \quad C_4 = v_1 \\
 v(L) = v_2 = C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + C_3 L + C_4 & \Rightarrow C_1 = \frac{(v_2 - v_1 - \varphi_2 L)}{\sin kL - kL \cos kL} \\
 \varphi(L) = \varphi_2 = kC_1 \cos kL - kC_2 \sin kL + C_3 & \quad C_3 = \frac{k \cos kL (v_2 - v_1 - \varphi_2 L)}{\sin kL - kL \cos kL}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Expresia efortului încovoiator $M_i(x)$ din relațiile (4) devine:

$$M_i(x) = EIv''(x) = -EI \cdot \frac{k^2(v_2 - v_1 - \varphi_2 L)}{\sin kL - kL \cos kL} \sin kx \tag{6}$$

$$M_1 = -M_i(0) = 0$$

$$M_2 = M_i(L) = -\frac{EI}{L^2} \frac{k^2 L^2 \sin kL}{\sin kL - kL \cos kL} (v_2 - v_1 - \varphi_2 L) \tag{7}$$

Dacă se fac notațiile: $P = k^2 EI$; $d_{kL} = \frac{k^2 L^2 \sin kL}{\sin kL - kL \cos kL}$, (8)

atunci relația (7) devine: $M_2 = -\frac{EI}{L} \frac{d_{kL}}{L} \cdot (v_2 - v_1 - \varphi_2 L)$ (9)

Forțele V_1 și V_2 se determină din ecuațiile de echilibru scrise pentru element:

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = 0 \\ -V_1 L + P(v_2 - v_1) + M_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = -V_2 = \frac{M_2}{L} + \frac{k^2 EI}{L} (v_2 - v_1) \\ V_1 = -V_2 = \frac{EI}{L} \left(\frac{-d_{kL} + k^2 L^2}{L^2} \right) (v_2 - v_1) + \frac{EI}{L} \cdot \frac{d_{kL}}{L} \varphi_2 \end{cases} \tag{10}$$

Relațiile (9) și (10) se mai pot scrie sub forma matriceală [2] astfel:

$$\begin{Bmatrix} V_{1-b} \\ M_{2-b} \\ V_{2-b} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{d_{kL} - k^2 L^2}{L^2} & \frac{d_{kL}}{L} & -\frac{d_{kL} - k^2 L^2}{L^2} \\ \frac{d_{kL}}{L} & d_{kL} & -\frac{d_{kL}}{L} \\ -\frac{d_{kL} - k^2 L^2}{L^2} & -\frac{d_{kL}}{L} & \frac{d_{kL} - k^2 L^2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

Cazul barei drepte **rigidă la un capăt și articulată la celălalt** (fig.3) se obține prin oglindirea figurii 2 față de o axă verticală, încât mărimile se modifică astfel: $M_2 \rightarrow M_1$; $V_2 \rightarrow V_1$; $V_1 \rightarrow V_2$; $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$; $v_2 \rightarrow v_1$; $v_1 \rightarrow v_2$.

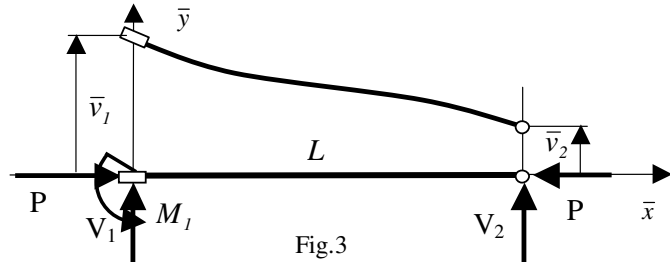


Fig.3

Relația matriceală (11) se scrie pentru acest caz astfel:

$$\begin{Bmatrix} V_{1-b} \\ M_{1-b} \\ V_{2-b} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} -\frac{d_{kl}-k^2L^2}{L^2} & \frac{d_{kl}}{L} & \frac{d_{kl}-k^2L^2}{L^2} \\ -\frac{d_{kl}}{L} & d_{kl} & \frac{d_{kl}}{L} \\ \frac{d_{kl}-k^2L^2}{L^2} & -\frac{d_{kl}}{L} & -\frac{d_{kl}-k^2L^2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

c. În cazul flambajului **barei drepte rigidă la ambele capete** (fig. 4), solicitată cu o forță axială P , forma de echilibru a deformatelor barei, funcțiile deplasărilor $v(x)$, rotirilor $\varphi(x)$ și eforturilor încovoietoare $M_i(x)$ sunt date [2] de expresiile:

$$\begin{aligned} v(x) &= C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 \\ \varphi(x) &= kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx + C_3 \\ M_i(x) &= EIv''(x) = -k^2 EI(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) \end{aligned} \quad (13)$$

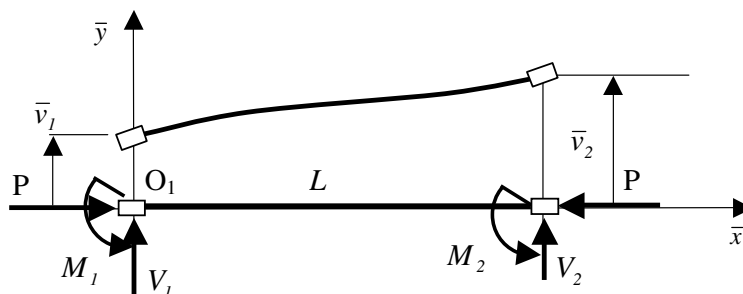


Fig.4

Constantele C_1 , C_2 , C_3 și C_4 se determină din condițiile la limită:

$$\begin{aligned} v(0) &= v_1 = C_2 + C_4 \\ \varphi(0) &= \varphi_1 = kC_1 + C_3 \\ v(L) &= v_2 = C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + C_3 L + C_4 \\ \varphi(L) &= \varphi_2 = kC_1 \cos kL - kC_2 \sin kL + C_3 \end{aligned} \quad (14)$$

Se obțin rezultatele:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(v_2 - v_1 - \varphi_1 L)k \sin kL + (\varphi_2 - \varphi_1)(\cos kL - 1)}{2k - 2k \cos kL - k^2 L \sin kL} \\ C_2 &= \frac{(v_2 - v_1 - \varphi_1 L)k(\cos kL - 1) + (\varphi_2 - \varphi_1)(kL - \sin kL)}{2k - 2k \cos kL - k^2 L \sin kL} \\ C_3 &= \varphi_1 - kC_1; \quad C_4 = v_1 - C_2 \end{aligned} \quad (15)$$

Expresia (13) a efortului încovoietor $M_i(x)$ devine:

$$M_i(x) = k^2 EI(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) \quad (16)$$

Expresiile efortului încovoietor M_i la capetele barei se scrie în funcție de deplasări și rotiri astfel:

$$\begin{aligned} M_1 &= -M_i(0) = -k^2 EI \cdot C_2 \\ M_2 &= M_i(L) = k^2 EI(C_1 \sin kL + C_2 \cos kL) \end{aligned} \quad (17)$$

Forțele V_1 și V_2 se determină din ecuațiile de echilibru scrite pentru element:

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = 0 \\ -V_1 L + P(v_2 - v_1) + M_1 + M_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = -V_2 = \frac{M_1 + M_2}{L} + \frac{k^2 EI}{L}(v_2 - v_1) \end{cases} \quad (18)$$

unde s-a notat: $P = k^2 EI$

Dacă se fac notațiile:

$$\begin{aligned} s_{kL} &= \frac{kL(\sin kL - kL \cos kL)}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL}; & c_{kL} &= \frac{kL - \sin kL}{\sin kL - kL \cos kL} \\ s_{kL} \cdot c_{kL} &= \frac{kL(kL - \sin kL)}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL}; & s_{kL}(1 + c_{kL}) &= \frac{k^2 L^2(1 - \cos kL)}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \end{aligned} \quad (19)$$

Relațiile (16) și (17) între forțele și deplasările nodale se mai pot scrie sub forma matriceală [2] astfel:

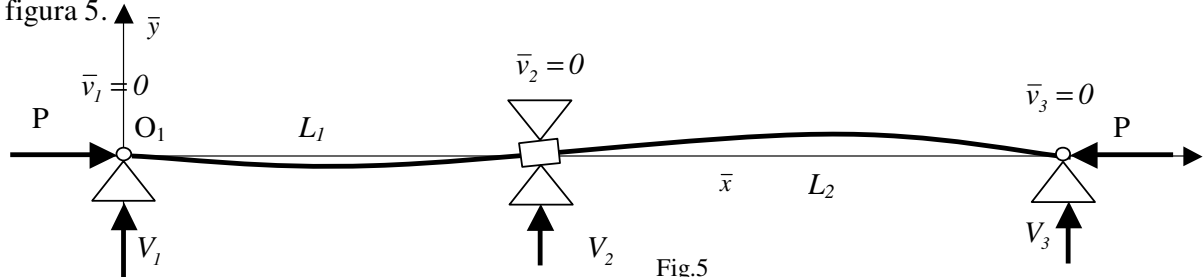
$$\begin{Bmatrix} M_{1-b} \\ V_{1-b} \\ M_{2-b} \\ V_{2-b} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} s_{kL} & \frac{s_{kL}(1+c_{kL})}{L} & s_{kL}c_{kL} & -\frac{s_{kL}(1+c_{kL})}{L} \\ \frac{s_{kL}(1+c_{kL})}{L} & \frac{2s_{kL}(1+c_{kL}-k^2L^2)}{L^2} & \frac{s_{kL}(1+c_{kL})}{L} & -\frac{2s_{kL}(1+c_{kL}-k^2L^2)}{L^2} \\ s_{kL}c_{kL} & \frac{s_{kL}(1+c_{kL})}{L} & s_{kL} & -\frac{s_{kL}(1+c_{kL})}{L} \\ -\frac{s_{kL}(1+c_{kL})}{L} & -\frac{2s_{kL}(1+c_{kL}-k^2L^2)}{L^2} & -\frac{s_{kL}(1+c_{kL})}{L} & \frac{2s_{kL}(1+c_{kL}-k^2L^2)}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ v_1 \\ \varphi_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Verificarea relației matriceale (20) se poate face prin particularizarea barei nesolicitate axial: în acest caz: $P \rightarrow 0$, $kL \rightarrow 0$ și se obține la limită valorile s_{kL} , c_{kL} ce conduc la aceleași relație forțe-deplasări (3):

$$\begin{aligned} \lim_{kL \rightarrow 0} s_{kL} &= \lim_{kL \rightarrow 0} \frac{kL(\sin kL - kL \cos kL)}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} = 4; \\ \lim_{kL \rightarrow 0} c_{kL} &= \lim_{kL \rightarrow 0} \frac{kL - \sin kL}{\sin kL - kL \cos kL} = \frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_{1-b} \\ V_{1-b} \\ M_{2-b} \\ V_{2-b} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & \frac{L^2}{12} & \frac{6}{L} & -\frac{L^2}{12} \\ 2 & \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & -\frac{L^2}{12} & -\frac{6}{L} & \frac{L^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ v_1 \\ \varphi_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

2. FLAMBAJUL BAREI ARTICULATE LA CAPETE CU UN REAZEM INTEREDIAR

Se consideră o bară dreaptă de rigiditate EI formată din două tronsoane de lungimi L_1 și L_2 , cu un reazem intermediar situată la limita celor două tronsoane, solicitată de o forță axială P ca în figura 5.



Pentru această coloană se pot scrie relațiile matriceale între forțele și deplasările nodale (11) și (12) pentru cele două tronsoane 1-2 și 2-3, ținând seama că deplasările din reazeme sunt nule, astfel:

- Bara 1 (tronsonul 1-2):
$$\begin{Bmatrix} V_{1-1} \\ M_{2-1} \\ V_{2-1} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L_1} \begin{bmatrix} \frac{d_{kL1}-k^2 L_1^2}{L_1} & \frac{d_{kL1}}{L_1} & -\frac{d_{kL1}-k^2 L_1^2}{L_1} \\ \frac{d_{kL1}}{L_1} & d_{kL1} & -\frac{d_{kL1}}{L_1} \\ -\frac{d_{kL1}-k^2 L_1^2}{L_1} & -\frac{d_{kL1}}{L_1} & \frac{d_{kL1}-k^2 L_1^2}{L_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

- Bara 2 (tronsonul 2-3):
$$\begin{Bmatrix} V_{2-2} \\ M_{2-2} \\ V_{3-2} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L_2} \begin{bmatrix} -\frac{d_{kL2}-k^2 L_2^2}{L_2^2} & \frac{d_{kL2}}{L_2} & \frac{d_{kL2}-k^2 L_2^2}{L_2^2} \\ -\frac{d_{kL2}}{L_2} & d_{kL2} & \frac{d_{kL2}}{L_2} \\ \frac{d_{kL2}-k^2 L_2^2}{L_2^2} & -\frac{d_{kL2}}{L_2} & -\frac{d_{kL2}-k^2 L_2^2}{L_2^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Ecuția de echilibru a eforturilor încovoietoare din reazemul 2 se scrie: $M_{2-1} + M_{2-2} = 0$ (24)

Ceea ce conduce la ecuația de stabilitate la flambaj pentru acest caz:

$$\left(\frac{EI}{L_1} d_{kL1} + \frac{EI}{L_2} d_{kL2} \right) \varphi_2 = 0 \quad (25)$$

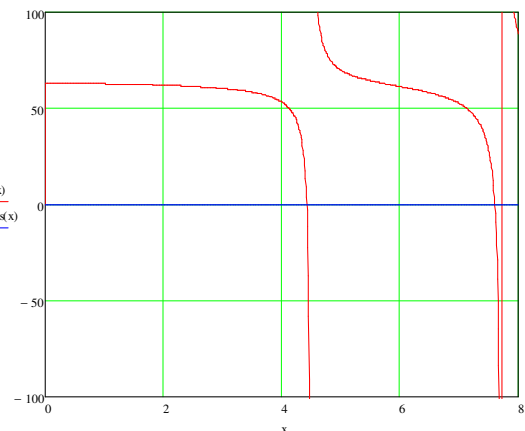
Pentru cazul particular: $L_1=L$, $L_2=\alpha L$, și pentru valorile numerice $\alpha=0.05$; $\alpha=0.1$; $\alpha=0.2$; $\alpha=0.5$; $\alpha=1$; $\alpha=2$; $\alpha=5$; $\alpha=10$, se obțin soluțiile date în tabelul 1, folosind programul MATCAD pentru reprezentarea funcției și calculul rădăcinilor ecuației

$$f(x) := \frac{x^2 \cdot \sin(x)}{\sin(x) - x \cos(x)} + \frac{x^2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha x)}{\sin(\alpha x) - \alpha x \cos(\alpha x)}$$

Tabelul 1

α	kL	$L_b/L = \pi/kL$	$P/P_E = (kL/\pi)^2$	Lungimea coloanei
0.05	4.4208	0.7106	1.9802	1.05 · L
0.1	4.3521	0.7218	1.9191	1.1 · L
0.2	4.2229	0.7439	1.8068	1.2 · L
0.5	3.8567	0.8146	1.5071	1.5 · L
1	3.1416	1	1	2L
2	1.9283	1.6292	0.3767	3L
3	1.3533	2.3214	0.1856	4L
4	1.0403	3.0199	0.1097	5L
5	0.8446	3.7196	0.0723	6L

root (f (x), x, 4, 4.48) = 4.4208



Observații:

- Cazul $\alpha=0.05$ corespunde barei de lungime $1.05L$ cu reazemul intermediar foarte apropiat de articulație și o forță critică de flambaj aproximativ $2 P_E$, unde $P_E=\pi^2 EI/L^2$ este forța critică EULER;
- Cazul $\alpha=1$ corespunde barei de lungime $2L$ articulată la capete cu un reazem intermediar la mijloc, lungimea de flambaj egală cu lungimea unui tronson și o forță critică de flambaj egală cu P_E ;
- Cazul $\alpha=5$ corespunde barei de lungime $6L$ articulată la capete cu un reazem intermediar mai apropiat de unul din capetele articulate, lungimea de flambaj egală cu $3.7196 L$ și o forță critică de flambaj egală cu $0.0723P_E$.

3. FLAMBAJUL BAREI ARTICULATE LA CAPETE CU DOUĂ REAZEME INTERMEDIARE

Se consideră o bară dreaptă de rigiditate EI formată din trei tronsoane de lungimi L_1 , L_2 , și L_3 , cu două reazeme intermediare situate la limita celor trei tronsoane, sollicitată de o forță axială P ca în figura 5.

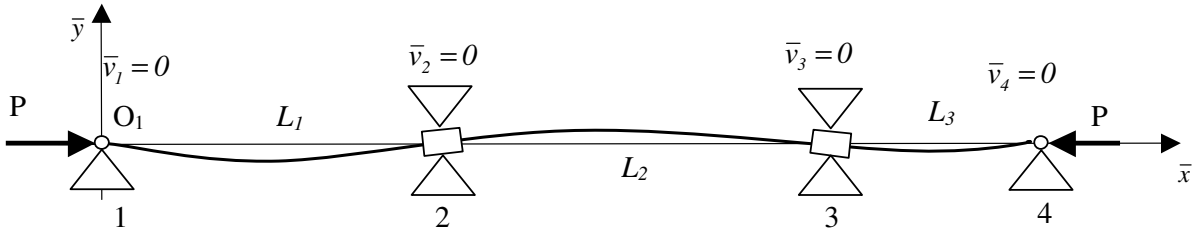


Fig.6

Pentru coloana din figura 6, se scriu relațiile matriceale între forțele nodale și deplasări (11), (12) și (20) pentru fiecare din cele trei tronsoane 1-2, 2-3 și 3-4 astfel

- Bara 1 (tronsonul 1-2):

$$\begin{Bmatrix} V_{1-1} \\ M_{2-1} \\ V_{2-1} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L_1} \begin{bmatrix} \frac{d_{kl1}-k^2 L_1^2}{L_1} & \frac{d_{kl1}}{L_1} & -\frac{d_{kl1}-k^2 L_1^2}{L_1} \\ \frac{d_{kl1}}{L_1} & d_{kl1} & -\frac{d_{kl1}}{L_1} \\ -\frac{d_{kl1}-k^2 L_1^2}{L_1} & -\frac{d_{kl1}}{L_1} & \frac{d_{kl1}-k^2 L_1^2}{L_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

- Bara 2 (tronsonul 2-3):

$$\begin{Bmatrix} M_{2-2} \\ V_{2-2} \\ M_{3-2} \\ V_{3-2} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L_2} \begin{bmatrix} s_{kl2} & \frac{s_{kl2}(1+c_{kl2})}{L_2} & s_{kl2}c_{kl2} & -\frac{s_{kl2}(1+c_{kl2})}{L_2} \\ \frac{s_{kl2}(1+c_{kl2})}{L_2} & \frac{2s_{kl2}(1+c_{kl2}-k^2 L_2^2)}{L_2^2} & \frac{s_{kl2}(1+c_{kl2})}{L_2} & -\frac{2s_{kl2}(1+c_{kl2}-k^2 L_2^2)}{L_2^2} \\ s_{kl2}c_{kl2} & \frac{s_{kl2}(1+c_{kl2})}{L_2} & s_{kl2} & -\frac{s_{kl2}(1+c_{kl2})}{L_2} \\ -\frac{s_{kl2}(1+c_{kl2})}{L_2} & -\frac{2s_{kl2}(1+c_{kl2}-k^2 L_2^2)}{L_2^2} & -\frac{s_{kl2}(1+c_{kl2})}{L_2} & \frac{2s_{kl2}(1+c_{kl2}-k^2 L_2^2)}{L_2^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ 0 \\ \varphi_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Bara 3 (tronsonul 3-4):

$$\begin{Bmatrix} V_{3-3} \\ M_{3-3} \\ V_{4-3} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L_3} \begin{bmatrix} -\frac{d_{kL3}-k^2L_3^2}{L_3^2} & \frac{d_{kL3}}{L_3} & \frac{d_{kL2}-k^2L_2^2}{L_3^2} \\ -\frac{d_{kL3}}{L_3} & d_{kL3} & \frac{d_{kL3}}{L_3} \\ \frac{d_{kL3}-k^2L_3^2}{L_3^2} & -\frac{d_{kL3}}{L_3} & -\frac{d_{kL3}-k^2L_3^2}{L_3^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Ecuatia de echilibru a eforturilor încovoietoare din reazemele 2 și 3 se scriu:

$$M_{2-1} + M_{2-2} = 0 \quad (29)$$

$$M_{3-2} + M_{3-3} = 0$$

Înlocuind expresiile momentelor M_{2-1} , M_{2-2} , M_{3-2} și M_{3-3} date de relațiile matriceale (26), (27) și (28) se obține sistemul omogen având ca necunoscute φ_2 și φ_3 :

$$\begin{cases} \frac{EI}{L_1} d_{kL1} \cdot \varphi_2 + \frac{EI}{L_2} (s_{kL2} \cdot \varphi_2 + s_{kL2} c_{kL2} \cdot \varphi_3) = 0 \\ \frac{EI}{L_2} (s_{kL2} c_{kL2} \cdot \varphi_2 + s_{kL2} \cdot \varphi_3) + \frac{EI}{L_3} d_{kL3} \cdot \varphi_3 = 0 \end{cases} \quad (30)$$

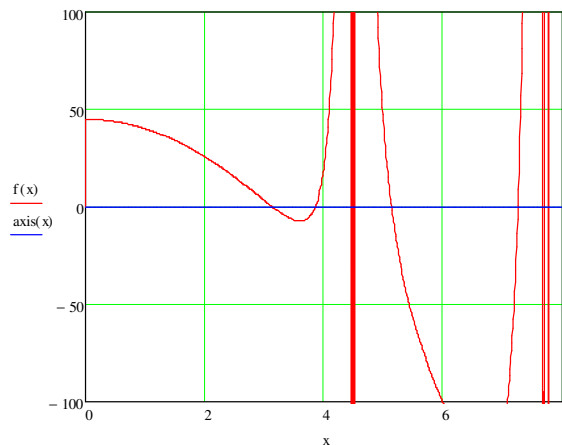
Sistemul (30) admite soluții nebanale dacă determinatul său este nul:

$$\begin{vmatrix} \frac{d_{kL1}}{L_1} + \frac{s_{kL2}}{L_2} & \frac{s_{kL2} c_{kL2}}{L_2} \\ \frac{s_{kL2} c_{kL2}}{L_2} & \frac{d_{kL3}}{L_3} + \frac{s_{kL2}}{L_2} \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

Pentru cazul particular: $L_1=L_3=L$, $L_2=\alpha L$ relația (31) devine:

$$\begin{vmatrix} \frac{d_{kL}}{L} + \frac{s_{\alpha kL}}{\alpha L} & \frac{s_{\alpha kL} c_{\alpha kL}}{\alpha L} \\ \frac{s_{\alpha kL} c_{\alpha kL}}{\alpha L} & \frac{d_{kL}}{L} + \frac{s_{\alpha kL}}{\alpha L} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{d_{kL}}{L} + \frac{s_{\alpha kL}}{\alpha L} \right)^2 - \left(\frac{s_{\alpha kL} c_{\alpha kL}}{\alpha L} \right)^2 = 0 \quad (32)$$

Pentru valorile numerice particulare: $\alpha=0.1$; $\alpha=0.2$; $\alpha=0.5$; $\alpha=0.8$; $\alpha=1$; $\alpha=2$; $\alpha=3$; $\alpha=4$; $\alpha=5$, se obțin soluțiile din tabelul 2, folosind programul MATCAD pentru reprezentarea funcției și calculul rădăcinilor ecuației.



$$d(x) := \frac{x^2 \cdot \sin(x)}{\sin(x) - x \cos(x)}$$

$$c\alpha(x) := \frac{\alpha \cdot x - \sin(\alpha \cdot x)}{\sin(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot x \cos(\alpha \cdot x)}$$

$$s\alpha(x) := \frac{\alpha \cdot x (\sin(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot x \cos(\alpha \cdot x))}{2 - 2 \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot x \sin(\alpha \cdot x)}$$

$$f(x) := \left(d(x) + \frac{s\alpha(x)}{\alpha} \right)^2 - \left(s\alpha(x) \cdot \frac{c\alpha(x)}{\alpha} \right)^2$$

$$\text{root}(f(x), x, 3, 3.5) = 3.1416$$

Tabelul 2

α	kL	$L_b/L = \pi/kL$	$P/P_E =$ $=(kL/\pi)^2$	Lungimea coloanei
0.1	4.2887	0.7325	1.8636	2.1 L
0.2	4.1156	0.7633	1.7162	2.1 L
0.5	3.7008	0.8489	1.3877	2.5 L
0.8	3.3557	0.9362	1.1109	2.8 L
1	3.1416	1	1	3L
2	2.2467	1.3978	0.5114	4L
3	1.6839	1.8657	0.2873	5L
4	1.3354	2.3525	0.1807	6L
5	1.1038	2.8462	0.1234	7L

Observații:

- Cazul $\alpha=0.1$ corespunde barei de lungime 2.1 L cu cele două reazeme intermediare situate la mijloc foarte apropiate, lungimea de flambaj egală cu 0.7325L și o forță critică de flambaj 1.8636 P_E , unde $P_E = \pi^2 EI/L^2$ este forța critică EULER;
- Cazul $\alpha=1$ corespunde barei de lungime 3L articulată la capete cu cele două reazeme intermediare echistante, lungimea de flambaj egală cu lungimea unui tronson și o forță critică de flambaj egală cu P_E ;
- Cazul $\alpha=5$ corespunde barei de lungime 7L articulată la capete cu cele două reazeme intermediare mai apropiate de capetele articulate, lungimea de flambaj egală cu 2.8462 L și o forță critică de flambaj 0.1234 P_E ;

3. CONCLUZII

- Metoda matriceală propusă este o metodă exactă pentru calculul forțelor critice de flambaj având la bază exprimarea unitară a relațiilor forțe-cupluri în funcție de deplasările liniare și unghiulare ale capetelor barei
- Metoda are un grad ridicat de generalitate în ceea ce privește configurațiile diferite de rezemare a coloanelor:
 - a. capetele pot fi articulate sau rigide la rotire;
 - b. se poate mari numărul reazemelor ($n > 2$);
 - c. se poate modifica oricum distanța între reazemele intermediare.
- Metoda poate fi extinsă într-o lucrare viitoare prin luarea în considerare și a deplasărilor laterale ale reazemelor intermediare

4. BIBLIOGRAFIE

1. **Cornel Marin** - *APLICAȚII ALE TEORIEI ELASTICITĂȚII ȘI PLASTICITĂȚII ÎN INGINERIE* Editura Biblioteca, Târgoviște 2007.
2. **Simulescu Ion** – BUCKLING AND INSTABILITY - Lecture 17, UTCB 2007, paragraf 1.6
3. **Cornel Marin, Anton Hadar, Florin Popa, Laurențiu Albu** - *MODELAREA CU ELEMENTE FINITE A STRUCTURILOR MECANICE* - Editura ACADEMIEI și Editura AGIR București, 2002.
4. **Cornel MARIN, Alexandru MARIN** - *METODĂ ANALITICĂ PENTRU REZOLVAREA SISTEMELOR STATIC NEDETERMINATE DE TIPUL GRINZILOR CONTINUE PE MAI MULTE REAZEME PUNCTUALE RIGIDE LA ACELAȘI NIVEL*, Sesiunea de comunicări științifice a UTCB, Facultatea de Utilaj Tehnologic – SIMEC 2007.
5. **Cornel Marin, Viviana Filip, Alexandru Marin** - *ANALYTICAL METHOD USED FOR PLOTTING THE SHEAR FORCE AND BENDING MOMENT DIAGRAMS, TRANSLATIONS AND ROTATIONS DISTRIBUTIONS ON BEAMS SUBJECTED TO BENDING*, International MultiConference of Engineers and Computer Scientists ICMES 2008, Hong Kong.