

# AMORTIZAREA DINAMICĂ A MAȘINILOR ȘI UTILAJELOR TEHNOLOGICE CU ACȚIUNE VIBRANTĂ

## DYNAMIC DAMPING OF THE MACHINES AND TECHNOLOGICAL EQUIPMENT DRIVEN BY VIBRATION

Conf. univ. dr. ing. Nicușor DRĂGAN

Facultatea de Inginerie din Brăila - Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați,  
Centrul de Cercetare pentru Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET  
Calea Calărășilor nr. 29, Brăila, RO-810017, Romania  
e-mail: ndragan@ugal.ro

**Rezumat.** Izolarea structurii la mașinile și echipamentele tehnologice cu acțiune vibrantă este o problemă foarte importantă care trebuie rezolvată încă din etapa de proiectare. Aceasta are în vedere reducerea vibrațiilor transmise operatorului uman, către mediul înconjurător și echipamentului propriu-zis. Această reducere a vibrațiilor daunătoare trebuie să se facă în contextul realizării parametrilor tehnologici ai vibrațiilor.

**Cuvinte cheie:** amortizare dinamică, vibrații decuplate, simetrii structurale

**Abstract.** The problem of insulation is very important for the process equipments driving by vibrations. This means less vibrations transmitted to human operators, to the environment and to the equipment himself. Sometimes it have to know how to insulate undesired vibrations keeping the useful vibrations done by the driving system. This article leads to some criterion to obtain a dynamical insulation of vibrations without to decrease their technological parameters.

**Keywords:** dynamic damping, decoupled vibrations, structural symmetries

### 1. INTRODUCERE. MODELAREA DINAMICĂ A SISTEMELOR MECANICE CU LEGĂTURI VÂSCO-ELASTICE

Prezenta lucrare abordează în special cazul utilajelor tehnologice și a mașinilor cu un singur organ de lucru rezemat elastic acționat armonic cu forțe unidirecționale, cum ar fi cazul transportoarelor și alimentatoarelor vibratoare, ciururilor vibratoare, plăcilor și/sau rulourilor compactoare vibratoare, etc..

Se consideră modelul cel mai general al unui solid rigid cu legături elastice și/sau vâscoelastice ca în **figura 1**; deasemenea, se consideră că cele  $n$  legăturile elastice  $k_i$   $i = \overline{1, n}$  sunt triortogonale cu caracteristicile elastice ca în modelul din **figura 2**, iar forțele de amortizare vâscoasă sunt introduse de  $m$  disipatoare triortogonale  $c_j$   $j = \overline{1, m}$  modelate ca în **figura 3**.

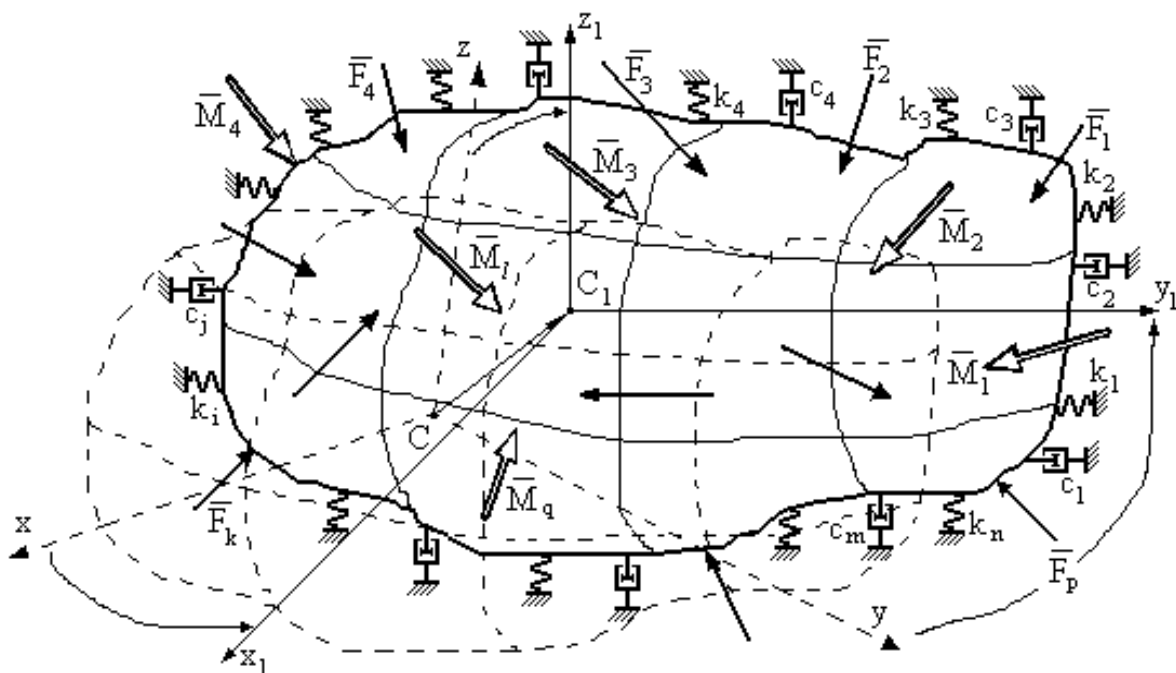


Fig. 1. Solid rigid cu legături vâsco-elastice acționat de sollicitări dinamice

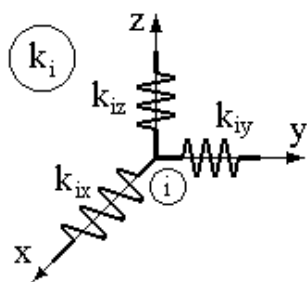


Fig. 2. Legătură elastică triortogonală

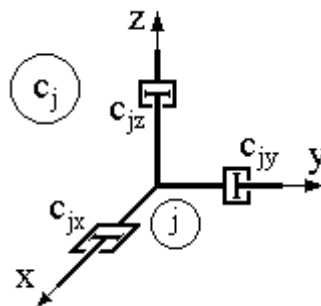


Fig. 3. Legătură vâscoasă triortogonală

Dacă asupra solidului rigid acționează  $p$  forțe  $\bar{F}_k$   $k = \overline{1, p}$  în punctele  $A_k(x_k, y_k, z_k)$  și  $q$  cupluri  $\bar{M}_l$   $l = \overline{1, q}$  ca în **figura 1**, ecuația diferențială de mișcare este [1]

$$\underline{A}\ddot{\underline{q}} + \underline{B}\dot{\underline{q}} + \underline{C}\underline{q} = \underline{f} \quad (1)$$

unde  $\underline{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T = [X, Y, Z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]^T$  sunt coordonatele generalizate

$\dot{\underline{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6]^T = [\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z]^T$  - vitezele generalizate

$\ddot{\underline{q}} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \ddot{q}_4, \ddot{q}_5, \ddot{q}_6]^T = [\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}, \ddot{\varphi}_x, \ddot{\varphi}_y, \ddot{\varphi}_z]^T$  - accelerațiile generalizate

$$\underline{f} = \begin{Bmatrix} Q_X^F \\ Q_Y^F \\ Q_Z^F \\ Q_{\varphi_x}^F \\ Q_{\varphi_y}^F \\ Q_{\varphi_z}^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^p F_{kx} \\ \sum_{k=1}^p F_{ky} \\ \sum_{k=1}^p F_{kz} \\ \sum_{k=1}^p (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}) + \sum_{l=1}^q M_{lx} \\ \sum_{k=1}^p (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}) + \sum_{l=1}^q M_{ly} \\ \sum_{k=1}^p (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}) + \sum_{l=1}^q M_{lz} \end{Bmatrix} \quad \text{- vectorul forțelor generalizate} \quad (2)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \quad \text{- matricea de inerție} \quad (3)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad \text{- matricea de amortizare} \quad (4)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \sum c_{jx} & 0 & 0 & 0 & \sum c_{jx}z_j & -\sum c_{jx}y_j \\ 0 & \sum c_{jy} & 0 & -\sum c_{jy}z_j & 0 & \sum c_{jy}x_j \\ 0 & 0 & \sum c_{jz} & \sum c_{jz}y_j & -\sum c_{jz}x_j & 0 \\ 0 & -\sum c_{jy}z_j & \sum c_{jz}y_j & \sum (c_{jy}z_j^2 + c_{jz}y_j^2) & -\sum c_{jz}x_jy_j & -\sum c_{jy}z_jx_j \\ \sum c_{jx}z_j & 0 & -\sum c_{jz}x_j & -\sum c_{jz}x_jy_j & \sum (c_{jz}x_j^2 + c_{jx}z_j^2) & -\sum c_{jx}y_jz_j \\ -\sum c_{jx}y_j & \sum c_{jy}x_j & 0 & -\sum c_{jy}z_jx_j & -\sum c_{jx}y_jz_j & \sum (c_{jx}y_j^2 + c_{jy}x_j^2) \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \sum k_{ix} & 0 & 0 & 0 & \sum k_{ix}z_i & -\sum k_{ix}y_i \\ 0 & \sum k_{iy} & 0 & -\sum k_{iy}z_i & 0 & \sum k_{iy}x_i \\ 0 & 0 & \sum k_{iz} & \sum k_{iz}y_i & -\sum k_{iz}x_i & 0 \\ 0 & -\sum k_{iy}z_i & \sum k_{iz}y_i & \sum (k_{iy}z_i^2 + k_{iz}y_i^2) & -\sum k_{iz}x_iy_i & -\sum k_{iy}z_ix_i \\ \sum k_{ix}z_i & 0 & -\sum k_{iz}x_i & -\sum k_{iz}x_iy_i & \sum (k_{iz}x_i^2 + k_{ix}z_i^2) & -\sum k_{ix}y_iz_i \\ -\sum k_{ix}y_i & \sum k_{iy}x_i & 0 & -\sum k_{iy}z_ix_i & -\sum k_{ix}y_iz_i & \sum (k_{ix}y_i^2 + k_{iy}x_i^2) \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} - \text{matricea de rigiditate} \quad (5)$$

punctele în care acționează cele  $n$  forțele elastice fiind  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ , iar forțele disipative vâscoase acționează în punctele  $N_j(x_j, y_j, z_j)$ .

Pentru simplificarea abordării analitice a problemei teoretice, se consideră că organul de lucru al utilajului tehnologic este rezemat elastic în patru puncte ca în **figura 4**. Deasemenea, se consideră că reazemele din punctele **1, 2, 3 și 4** sunt identice, caracteristicile elastice ale acestora după direcțiile  $x$ ,  $y$  și  $z$  fiind  $k_x$ ,  $k_y$  respectiv  $k_z$ .

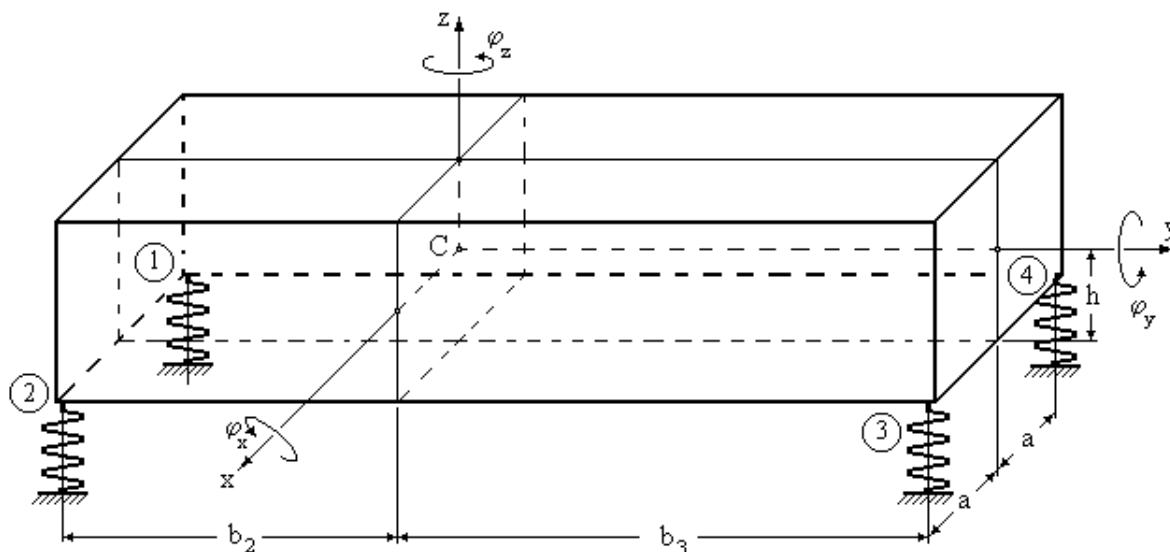


Fig. 4. Solid rigid cu legături elastice cu simetrii structurale după un plan longitudinal-vertical

În plus, se poate considera o simetrie structurală și de distribuție a maselor astfel încât rigidul rezemat elastic din figura 4 are un plan de simetrie vertical longitudinal, putând astfel utiliza sistemul de axe central  $Cxzy$  față de care se poate studia mișcarea, prin coordonatele generalizate  $X$  (derapare),  $Y$  (înaintare),  $Z$  (săltare),  $\varphi_x$  (galopare),  $\varphi_y$  (ruliu) și  $\varphi_z$  (întoarcere). Dacă în plus, sistemul de axe este și principal (cu centrul de greutate  $C$  situat la înălțimea  $h$  față de planul de suspensie) rezultă o simplificare a ecuațiilor diferențiale de mișcare pe de o parte iar, pe de altă parte, o decuplare acestor ecuații cu o importanță foarte mare pentru studiul analitic al parametrilor dinamici.

Conform [2], ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor libere ale celor două subsisteme decuplate (cu mișcări cuplate) sunt:

a) pentru vibrațiile cuplate longitudinale  $Y$ , verticale  $Z$  și de tangaj  $\varphi_x$

$$\begin{cases} m\ddot{Y} + 4k_y Y + 4hk_y \varphi_x = 0 \\ m\ddot{Z} + 4k_z Z + 2k_z(b_3 - b_2)\varphi_x = 0 \\ J_x \ddot{\varphi}_x + 4hk_y Y + 2k_z(b_3 - b_2)Z + 2\left[k_z(b_2^2 + b_3^2) + 2h^2 k_y\right]\varphi_x = 0 \end{cases} \quad (6)$$

b) pentru vibrațiile cuplate laterale  $X$ , de ruluu  $\varphi_y$  și de girație  $\varphi_z$

$$\begin{cases} m\ddot{X} + 4k_x X - 4hk_x \varphi_y - 2k_x(b_3 - b_2)\varphi_z = 0 \\ J_y \ddot{\varphi}_y - 4hk_x X + 4(h^2 k_x + a^2 k_z)\varphi_y + 2hk_x(b_3 - b_2)\varphi_z = 0 \\ J_z \ddot{\varphi}_z - 2k_x(b_3 - b_2)X + 2hk_x(b_3 - b_2)\varphi_y + 2[2a^2 k_y + k_x(b_2^2 + b_3^2)]\varphi_z = 0 \end{cases} \quad (7)$$

## 2. MODELAREA DINAMICĂ A VIBRAȚIILOR FORȚATE ÎN REGIM STAȚIONAR

Se consideră că asupra rigidului care modelează organul de lucru cu ipotezele din §2 acționează o excitație armonică unidirecțională de amplitudine  $F_0$  și pulsație  $\omega$  ca în **figura 5**, unde  $\beta$  este unghiul de înclinare a forței (de obicei acesta este un parametru tehnologic, împreună cu  $F_0$  și  $\omega$ ) iar  $\varepsilon_x$  și  $\varepsilon_y$  sunt excentricitățile punctului de aplicare a forței în raport cu centrul de greutate  $C$ ; forța este aplicată într-un plan vertical paralel cu planul central  $zCy$ .

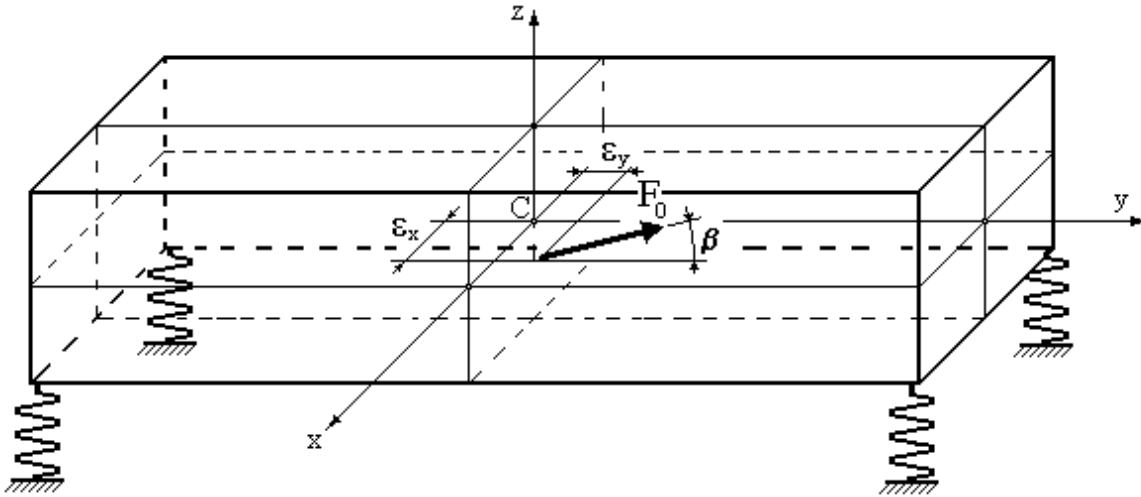


Fig. 5. Solid rigid cu legături elastice acționat de o forță înclinată excentrică

Cu ipotezele de mai sus, ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor forțate în regim stabilizat sunt:

a) pentru vibrațiile forțate ale subsistemului ( $Y, Z, \varphi_x$ )

$$\begin{cases} m\ddot{Y} + 4k_y Y + 4hk_y \varphi_x = F_0 \cos \beta \sin \omega t \\ m\ddot{Z} + 4k_z Z + 2k_z(b_3 - b_2)\varphi_x = F_0 \sin \beta \sin \omega t \\ J_x \ddot{\varphi}_x + 4hk_y Y + 2k_z(b_3 - b_2)Z + 2[k_z(b_2^2 + b_3^2) + 2h^2 k_y]\varphi_x = \varepsilon_y F_0 \sin \beta \sin \omega t \end{cases} \quad (8)$$

**b)** pentru vibrațiile forțate ale subsistemului ( $X$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$ )

$$\begin{cases} m\ddot{X} + 4k_x X - 4hk_x \varphi_y - 2k_x(b_3 - b_2)\varphi_z = 0 \\ J_y \ddot{\varphi}_y - 4hk_x X + 4(h^2 k_x + a^2 k_z)\varphi_y + 2hk_x(b_3 - b_2)\varphi_z = -\varepsilon_x F_0 \sin \beta \sin \omega t \\ J_z \ddot{\varphi}_z - 2k_x(b_3 - b_2)X + 2hk_x(b_3 - b_2)\varphi_y + 2[2a^2 k_y + k_x(b_2^2 + b_3^2)]\varphi_z = \varepsilon_x F_0 \cos \beta \sin \omega t \end{cases} \quad (9)$$

Amplitudinile vibrațiilor forțate în regim stabilizat sunt [3] [4]:

**a)** pentru vibrațiile forțate ale subsistemului ( $Y$ ,  $Z$ ,  $\varphi_x$ )

$$A_Y = \frac{F_0 \cos \beta}{\Delta_I} \left\{ (4k_z - m\omega^2) [2k_z(b_2^2 + b_3^2) + 4h^2 k_y - J_x \omega^2] - [2k_z(b_3 - b_2)]^2 \right\} + \frac{4hk_y F_0 \sin \beta}{\Delta_I} [2k_z(b_3 - b_2) - \varepsilon_y (4k_z - m\omega^2)] \quad (10)$$

$$A_Z = \frac{F_0 \sin \beta}{\Delta_I} \left\{ 2k_z(b_2^2 + b_3^2) + 4h^2 k_y - J_x \omega^2 \right\} [4k_y - m\omega^2] - (4hk_y)^2 + \frac{2(b_3 - b_2)k_z F_0}{\Delta_I} [4hk_y \cos \beta - \varepsilon_y (4k_y - m\omega^2) \sin \beta] \quad (11)$$

$$A_{\varphi_x} = \frac{F_0}{\Delta_I} \left[ -4hk_y (4k_z - m\omega^2) \cos \beta - 2k_z(b_3 - b_2) (4k_y - m\omega^2) \sin \beta + \varepsilon_y (4k_y - m\omega^2) (4k_z - m\omega^2) \sin \beta \right] \quad (12)$$

unde

$$\Delta_I = (4k_y - \omega^2 m) (4k_z - \omega^2 m) \left\{ 2[k_z(b_2^2 + b_3^2) + 2h^2 k_y] - \omega^2 J_x \right\} - [2k_z(b_3 - b_2)]^2 (4k_y - \omega^2 m) - (4hk_y)^2 (4k_z - \omega^2 m) \quad (13)$$

**b)** pentru vibrațiile forțate ale subsistemului ( $X$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$ )

$$A_X = \frac{2k_x}{\Delta_2} \left\{ -2h\varepsilon_x F_0 [4a^2 k_y + k_x(b_3 + b_2)^2 - J_z \omega^2] \sin \beta + \varepsilon_x F_0 (b_3 - b_2) (4a^2 k_z - J_y \omega^2) \cos \beta \right\} \quad (14)$$

$$A_{\varphi_y} = \frac{-\varepsilon_x F_0}{\Delta_2} \left\{ 4a^2 k_y + 2k_x(b_2^2 + b_3^2) - J_z \omega^2 \right\} [4k_x - m\omega^2] - [2k_x(b_3 - b_2)]^2 \sin \beta + \frac{\varepsilon_x F_0}{\Delta_2} 2hk_x(b_3 - b_2) m\omega^2 \cos \beta \quad (15)$$

$$A_{\varphi_z} = \frac{-\varepsilon_x F_0}{\Delta_2} 2hk_x(b_3 - b_2) m\omega^2 \sin \beta + \frac{\varepsilon_x F_0}{\Delta_2} \left\{ (4k_x - m\omega^2) [4(h^2 k_x + a^2 k_z) - J_y \omega^2] - (4hk_x)^2 \right\} \cos \beta \quad (16)$$

unde

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & (4k_x - m\omega^2) \left[ 4(h^2k_x + a^2k_z) - J_y\omega^2 \right] \left\{ 2[2a^2k_y + k_x(b_2^2 + b_3^2)] - J_z\omega^2 \right\} + \\ & + 2(-4hk_x) [2hk_x(b_3 - b_2)] - 2k_x(b_3 - b_2) - [2hk_x(b_3 - b_2)]^2 (4k_x - m\omega^2) - \\ & - [-2k_x(b_3 - b_2)]^2 \left[ 4(h^2k_x + a^2k_z) - J_y\omega^2 \right] - (-4hk_x)^2 \left\{ 2[2a^2k_y + k_x(b_2^2 + b_3^2)] - J_z\omega^2 \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

### 3. AMORTIZAREA DINAMICĂ A RIGIDULUI REZEMAT ÎN PLANUL ORIZONTAL AL CENTRULUI DE GREUTATE

Pentru a stabili condițiile în care se poate face o amortizare dinamică a echipamentului trebuie să se stabilească parametrii care pot fi modificați fără a afecta cerințele tehnologice; de obicei cerințele tehnologice se referă la amplitudinile vibrațiilor forțate de înaintare și de săltare cu respectarea unghiului de aruncare, acestea fiind relativ ușor de controlat prin intermediul forței perturbatoare (cu parametrii  $F_0$ ,  $\omega$  și  $\beta$ ). Din analiza relațiilor care dau expresiile amplitudinilor vibrațiilor forțate, se constată o anulare a vibrațiilor forțate în următoarele condiții:

1. dacă  $\varepsilon_x = 0$  (planul forței unidirecționale coincide cu planul vertical de simetrie) rezultă anularea vibrațiilor forțate (nedorite) ale subsistemului ( $X$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$ );

2. dacă  $h = 0$  (rezemare în planul orizontal al centrului de greutate), atunci se anulează:

a) vibrațiile forțate de întoarcere la acordarea vibrațiilor libere necuplate de săltare cu perturbația:

$$\omega^2 = p_Z^2 = 4 \frac{k_z}{m} \Rightarrow A_{\varphi_z} = 0 \quad (18)$$

b) vibrațiile forțate de săltare dacă  $\varepsilon_y = 0$  (forță perturbatoare unidirecțională centrală) și vibrațiile libere necuplate de galopare sunt acordate cu perturbația:

$$\omega^2 = p_{\varphi_x}^2 = \frac{2k_z}{J_x} (b_2^2 + b_3^2) \Rightarrow A_Z = 0, \quad (19)$$

unde  $p_Z$  și  $p_{\varphi_x}$  sunt pulsațiile proprii pentru mișcările „necuplate” de săltare și galopare.

3. dacă  $b_2 = b_3$  rigidul din figura 4 are două plane verticale de simetrie (deci o axă verticală de simetrie); în acest caz problema vibrațiilor libere și forțate se schimbă calitativ, având loc o decuplare a mișcărilor sistemului în următoarele subsisteme și mișcări independente:

- a) subsistemul ( $X$ ,  $\varphi_y$ ) cu mișcări cuplate de derapare și legănare;
- b) subsistemul ( $Y$ ,  $\varphi_x$ ) cu mișcări cuplate de înaintare și galopare;
- c) mișcare independentă de săltare  $Z$ ;
- d) mișcare independentă de întoarcere  $\varphi_z$ .

### 4. CONCLUZII

Pentru a putea analiza în mod pertinent condițiile în care are loc o reducere a vibrațiilor forțate nedorite la utilajele și echipamentele cu acționare dinamică armonică, încă

de la început trebuie să se stabilească parametrii care pot fi schimbați și cei care sunt impuși din motive tehnologice. Din analiza dinamică a condițiilor în care are loc reducerea sau anularea amplitudinilor vibrațiilor forțate, se pot formula următoarele concluzii:

- ▶ cea mai eficientă cale de reducere a vibrațiilor nedorite este de a asigura simetria longitudinală a echipamentului și din punctul de vedere al acționării ( $\varepsilon_x = 0$ );
- ▶ amortizarea dinamică în sensul de acordare a pulsației perturbației cu una din pulsațiile caracteristice din sistemul se poate face numai dacă centrul de greutate se găsește în planul orizontal al reazemelor; chiar și așa, problema amortizării dinamice trebuie abordată separat pentru fiecare caz în parte pentru că, sau se obține o amortizare dinamică pentru vibrațiile tehnologice utile (19) sau pulsația  $\omega$  a perturbației poate fi destul de apropiată de una din pulsațiile proprii ale sistemului (18), funcționarea utilajului putând avea loc în regim de rezonanță.

#### REFERINȚE

- [1] P. P. BRATU, N. DRĂGAN, “L'analyse dynamique de l'interaction machine-structure sur la base du modèle équivalent de rigide aux liaisons visco-élastiques”, Analele Universității “Dunărea de Jos” din Galați Fascicula XIV, vol. III, 1997, pag. 9-14
- [2] P. P. BRATU, N. DRĂGAN, “L'analyse des mouvements désaccouplés appliquée au modèle de solide rigide aux liaisons élastiques”, Analele Universității “Dunărea de Jos” din Galați Fascicula XIV, vol. III, 1997, pag. 15-20
- [3] N. DRĂGAN, “Les paramètres dynamiques du rigide aux liaisons élastiques excité par des sollicitations déterministes”, Analele Universității “Dunărea de Jos” din Galați Fascicula XIV, vol. III, 1997, pag. 24-29
- [4] N. DRĂGAN, “Contribuții la analiza și optimizarea transportului prin vibrații” – teză de doctorat, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, 2001