

STUDIU COMPARATIV PRIVIND STAREA DE TENSIUNE ȘI DEFORMAȚIE ÎN CAZUL UNOR ELEMENTE SPECIFICE SISTEMELOR DE VIBROIZOLARE ALE MAȘINILOR DINAMICE

COMPARATIVE STRESS AND DEFLECTION STATE EVALUATION STUDY CONCERNING DYNAMIC EQUIPMENT SHOCK AND VIBRATION DAMPING ELEMENTS

Ș. I. dr. ing. Ștefan MOCANU

Universitatea Tehnică de Construcții București
b-dul Lacul Tei 124, sector 2 RO-72302, Romania
e-mail: mocanu_stefan@hotmail.com

Rezumat: Sistemele de vibroizolare ale mașinilor dinamice caracteristice domeniului de mașini și utilaje pentru construcții și nu numai, implică utilizarea unor elemente amortizoare cu diverse forme și dimensiuni; una din soluțiile cel mai des întâlnite este reprezentată de elementul de tip arc, dezvoltări ulterioare punând accentul pe utilizarea unor sisteme de bare (cabluri flexibile) cu comportament asemănător.

Articolul de față prezintă algoritmul de calcul pentru estimarea stării de tensiune și deformație în cazul unui element semicircular încărcat normal pe planul său, rezultatele obținute fiind comparate cu mărimile finale oferite de metode numerice alternative.

Cuvinte cheie: bară curbă, solicitare compusă, Maxwell-Mohr, AxisVM.

Abstract: The damping elements used in shock and vibration attenuation came in various shapes and sizes; however one of the most common solutions being the spring shape, recent developements are using steel cable frames with beam-like behaviour. The present paper is focused on elementary strenght of materials calculus concerning stress and deflection state versus finite element analysis results for a simple curve shaped beam example.

Keywords: curved beam, combined stresses, Maxwell-Mohr, AxisVM.

1. INTRODUCERE

Sistemele de vibroizolare ale mașinilor dinamice caracteristice domeniului de mașini și utilaje pentru construcții implică utilizarea unor elemente amortizoare cu diverse forme și dimensiuni; una din soluțiile cel mai des întâlnite fiind resortul (element de tip arc), dezvoltările ulterioare au pus accentul pe utilizarea unor sisteme de bare (cabluri flexibile) cu comportament asemănător.

Articolul de față prezintă punctul de plecare al unor studii privind rigiditatea izolatorilor de vibrații cu elemente elastice semicirculare, elemente de calcul ale cuplajelor elastice cu cabluri de oțel dispuse radial și a unor structuri reticulare plane din cabluri de oțel inoxidabil, studii la care autorul a avut șansa de a participa de-a lungul carierei, punct de

vedere completat la momentul actual, pentru stabilirea gradului de dispersie a rezultatelor obținute, de utilizarea în paralel a metodei elementului finit.

2. ABORDARE CLASICĂ. SCHEMĂ DE CALCUL

Pentru parcurgerea etapei de calcul a fost utilizat sistemul static nedeterminat [1] din figura 1, sistem de forma unei jumătăți de spiră încastrată în ambele extremități, solicitat normal pe planul său – se ajunge la bara curbă de forma unei jumătăți de cerc, încărcată cu o sarcină concentrată [1,2] de intensitate P , sarcină ce acționează pe direcție perpendiculară pe planul format de bară, r reprezentând raza medie de curbura [1,2] a barei curbe, d - diametrul secțiunii de formă circulară plină, iar α -unghiul curent de parcurgere al barei. Pentru exemplul numeric au fost utilizate valorile: $P = 15\text{daN}$, $d = 18\text{mm}$, $r = 600\text{mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{N/mm}^2$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{N/mm}^2$, cazul fiind situat în domeniul barelor curbe de curbura mică ($\frac{R_m}{h} = \frac{r}{d}; \frac{600}{18} = 33,33 > 10$) [2, 7].

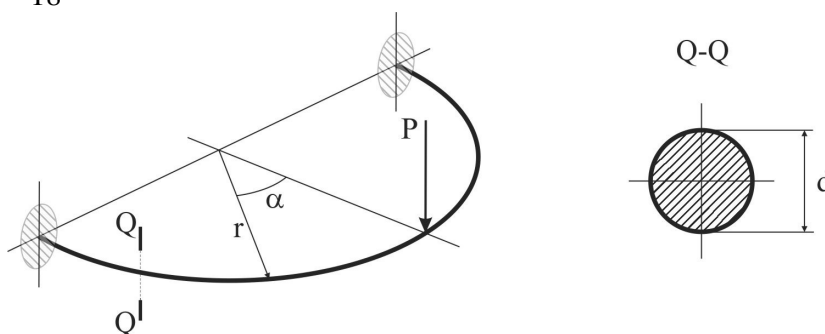


Fig. 1. Schema de calcul

Pentru stabilirea tipului de solicitare la care lucrează structura, este necesară ridicarea nedeterminării sistemului; principial, se remarcă gradul de nedeterminare al structurii ca fiind $n = 6$ [2], fiind necesară găsirea unui număr teoretic de șase necunoscute, algoritmul de rezolvare fiind “metoda eforturilor” [2], pe o formă de bază ce ține seama de simetria schemei de calcul [2] (figura 2). Metoda implică rezolvarea unui sistem de ecuații de continuitate, scrise în formă canonică, numărul de ecuații ale sistemului fiind egal cu gradul de nedeterminare a structurii studiate:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{14} \cdot X_4 + \delta_{15} \cdot X_5 + \delta_{16} \cdot X_6 + \Delta_{10} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{24} \cdot X_4 + \delta_{25} \cdot X_5 + \delta_{26} \cdot X_6 + \Delta_{20} = 0; \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{34} \cdot X_4 + \delta_{35} \cdot X_5 + \delta_{36} \cdot X_6 + \Delta_{30} = 0; \\ \delta_{41} \cdot X_1 + \delta_{42} \cdot X_2 + \delta_{43} \cdot X_3 + \delta_{44} \cdot X_4 + \delta_{45} \cdot X_5 + \delta_{46} \cdot X_6 + \Delta_{40} = 0; \\ \delta_{51} \cdot X_1 + \delta_{52} \cdot X_2 + \delta_{53} \cdot X_3 + \delta_{54} \cdot X_4 + \delta_{55} \cdot X_5 + \delta_{56} \cdot X_6 + \Delta_{50} = 0; \\ \delta_{61} \cdot X_1 + \delta_{62} \cdot X_2 + \delta_{63} \cdot X_3 + \delta_{64} \cdot X_4 + \delta_{65} \cdot X_5 + \delta_{66} \cdot X_6 + \Delta_{60} = 0, \end{cases} \quad (0.1)$$

fiecare ecuație în parte reprezentând deplasarea pe direcția fiecărei necunoscute în parte (X_i), deplasare datorată tuturor celorlalte necunoscute, precum și sistemului de sarcini inițiale ce formează schema de încărcare [2].

Pentru simplificarea sistemului de ecuații se poate ține seama de caracterul particular al schemelor de rezemare, respectiv de încărcare, ajungându-se astfel la forma de bază obținută prin secționarea în dreptul punctului de aplicație a sarcinii P , astfel:

Studiu comparativ privind starea de tensiune și deformație în cazul unor elemente specifice sistemelor de vibroizolare ale mașinilor dinamice

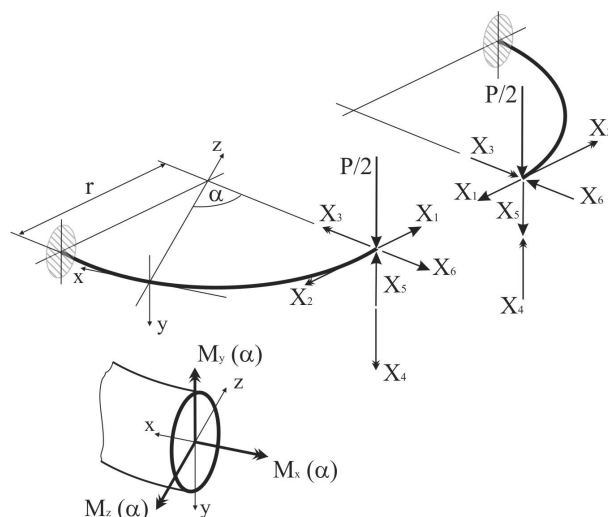


Fig. 2. Forma de bază

Pentru determinarea termenilor caracteristici ai ecuațiilor sistemului (1.1) se utilizează metoda energetică Maxwell-Mohr [2,7], din șirul de termeni ai relației păstrând doar pe cei cu referire la solicitările de încovoiere și torsiune (răsucire), fapt datorat ponderii semnificative a acestor solicitări în defavoarea restului termenilor ce compun expresia (sistem spațial de bare încărcat normal pe planul său)[3,6,7].

Se exprimă (figura 3), polinoamele de variație în lungul barei pentru eforturile secționale de tip momente încovoietoare și momente de torsiune, încărcându-se pe rând forma de bază, în exclusivitate, cu necunoscutele $X_i = 1$ (obținând, după caz, polinoamele pentru diagramele m_{ix} , m_{iy} , m_{iz}), respectiv cu sarcini inițiale (diagrame M_0)[7].

Se remarcă faptul că, datorită particularităților schemei de calcul și a caracteristicilor de simetrie sau antisimetrie a diagramelelor obținute, sistemul de ecuații (1.1) se reduce la o singură ecuație de forma:

$$\delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{30} = 0, \quad (0.2)$$

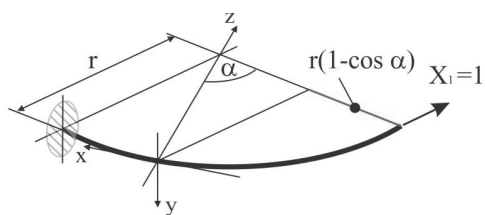
ecuație ai cărei termeni caracteristici se determină cu formula Maxwell-Mohr, astfel:

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \cdot r \, d\alpha + \frac{1}{GI_t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \cdot r \, d\alpha; \quad (0.3)$$

$$\Delta_{30} = -\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P}{2} r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot r \, d\alpha - \frac{1}{GI_t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P}{2} r (1 - \cos \alpha) \sin \alpha \cdot r \, d\alpha,$$

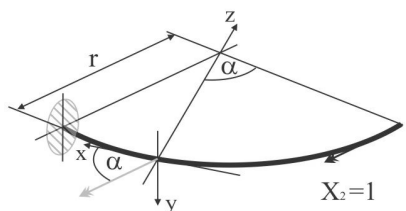
după prelucrari:

$$\delta_{33} = \frac{r}{EI} 0,7854 + \frac{r}{GI_t} 0,7854; \quad \Delta_{30} = -\frac{Pr^2}{2EI} 0,5 - \frac{Pr^2}{2GI_t} 0,5. \quad (0.4)$$



$$m_{1y} = r(1 - \cos \alpha),$$

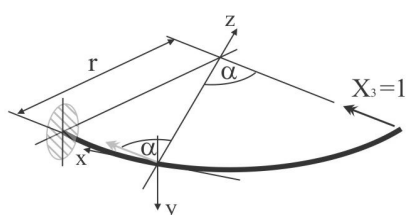
simetrica



$$m_{2z} = -\sin \alpha;$$

$$m_{2x} = \cos \alpha,$$

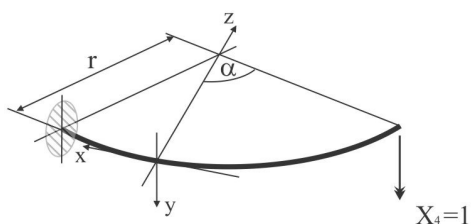
antisimetrice



$$m_{3z} = \cos \alpha;$$

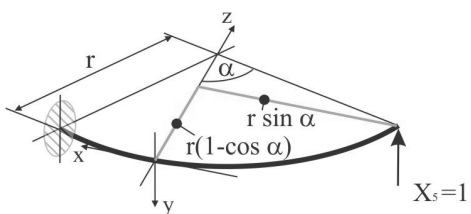
$$m_{3x} = \sin \alpha,$$

simetrice



$$m_{4y} = 1,$$

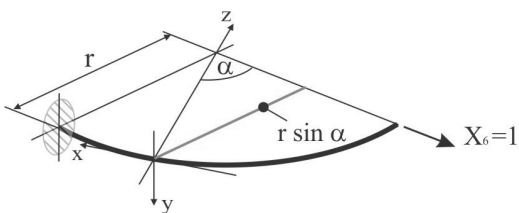
simetrica



$$m_{5z} = r \sin \alpha;$$

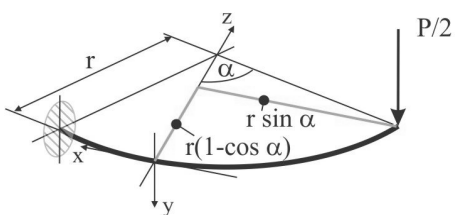
$$m_{5x} = r(1 - \cos \alpha),$$

antisimetrice



$$m_{6y} = -r \sin \alpha,$$

antisimetrice



$$M_{0z} = -\frac{P}{2} r \sin \alpha;$$

$$M_{0x} = -\frac{P}{2} r(1 - \cos \alpha),$$

simetrice

Fig. 3. Polinoame diagrame de moment

Studiu comparativ privind starea de tensiune și deformație în cazul unor elemente specifice sistemelor de vibroizolare ale mașinilor dinamice

Prin substituirea termenilor caracteristici (1.4) astfel calculați în ecuația de continuitate de forma (1.2), se determină necunoscuta:

$$X_3 = -\frac{\Delta_{30}}{\delta_{33}}; \quad X_3 = 0,3183 Pr. \quad (0.5)$$

Legile de variație ale polinoamelor diagramelor de moment finale (1.6), se obțin prin încărcarea simultană a formei de bază cu necunoscuta aflată și sistemul de sarcini inițiale (figura 4), astfel:

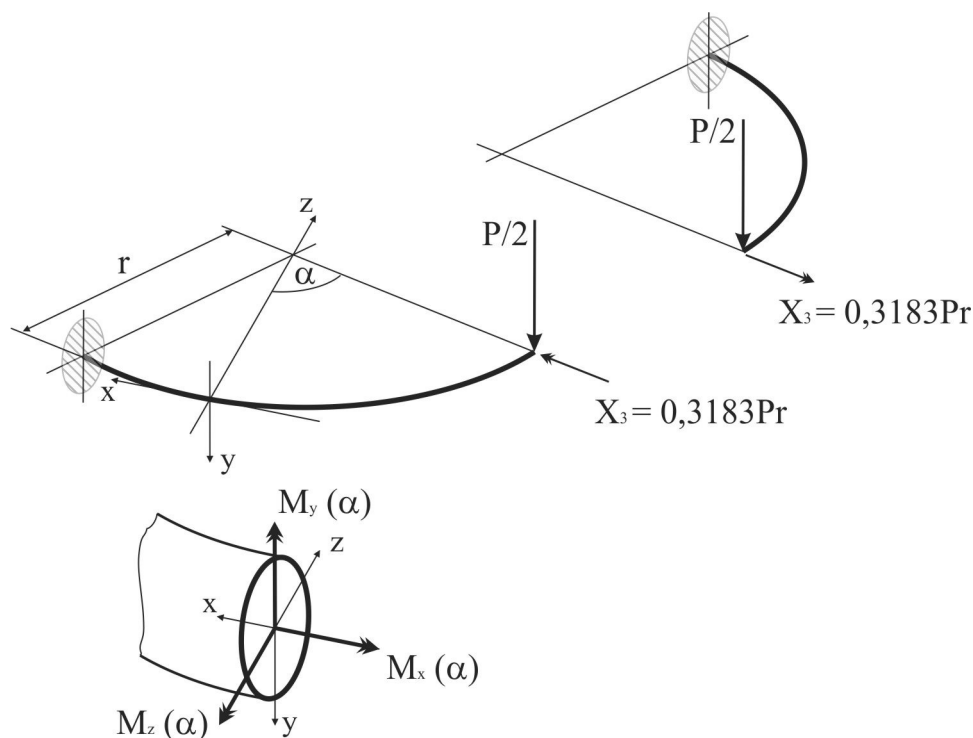


Fig. 4. Schema de încărcare finală

$$\begin{aligned} M_z &= 0,3183 Pr \cdot \cos \alpha - 0,5 Pr \cdot \sin \alpha; \\ M_x &= 0,3183 Pr \cdot \sin \alpha - 0,5 Pr(1 - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (0.6)$$

Prin egalarea cu zero a relațiilor (1.6) și rezolvarea în raport cu variabila a ecuațiilor astfel obținute [5], se determină punctele de anulare a diagramelor de moment:

$$\begin{aligned} 0,3183 \cdot \cos \alpha - 0,5 \cdot \sin \alpha = 0 &\Rightarrow \alpha_0 = 0,566897 \text{ rad}, \quad \alpha_0 = 32,48^\circ; \\ 0,3183 \cdot \sin \alpha - 0,5(1 - \cos \alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha'_0 = 1,13379 \text{ rad}, \quad \alpha'_0 = 64,96^\circ, \end{aligned} \quad (0.7)$$

valori ce pot fi utilizate la verificarea corectitudinii expresiilor găsite.

Structura este solicitată la încovoiere cu torsiune, oricare dinre cele două reazeme încastrate putând fi considerat drept secțiune periculoasă; pentru estimarea stării de tensiune la nivelul secțiunii periculoase, se calculează valorile eforturilor unitare corespunzătoare fiecărui tip de solicitare elementară în parte [2,7], astfel:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_{axef}} = \frac{|Pr(-0,5)|}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{0,045 \cdot 10^6}{\frac{\pi \cdot 18^3}{32}} = 78,59 \text{ N/mm}^2, \quad (0.8)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_{pef}} = \frac{|Pr(0,3183-0,5)|}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{0,016353 \cdot 10^6}{\frac{\pi \cdot 18^3}{16}} = 14,28 \text{ N/mm}^2. \quad (0.9)$$

Prin utilizarea relațiilor oferite de criteriile studiate în cadrul teoriilor de rezistență se obțin valorile efortului unitar normal echivalent, de exemplu:

- conform teoriei tensiunilor tangențiale maxime (T_{III} sau criteriul Tresca) [7]:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} = \sqrt{78,59^2 + 4 \cdot 14,28^2} = 83,62 \text{ N/mm}^2; \quad (0.10)$$

- conform teoriei energiei specifice de deviație (T_{IV} sau criteriul von Mises-Hencki)[7]:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^2} = \sqrt{78,59^2 + 3 \cdot 14,28^2} = 82,39 \text{ N/mm}^2. \quad (0.11)$$

Pentru estimarea stării de deformare, se admite drept criteriu de comparație final valoarea proiecției pe verticală a deplasării punctului de aplicație a sarcinii concentrate P [6,7], pentru a cărei determinare se încarcă forma de bază, în exclusivitate, cu o sarcină virtuală unitară de natura și pe direcția deplasării căutate (figura 5); se obțin expresiile diagramelor de moment de forma:

$$\begin{aligned} m_z &= -0,5 r \cdot \sin \alpha; \\ m_x &= -0,5 r (1 - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (0.12)$$

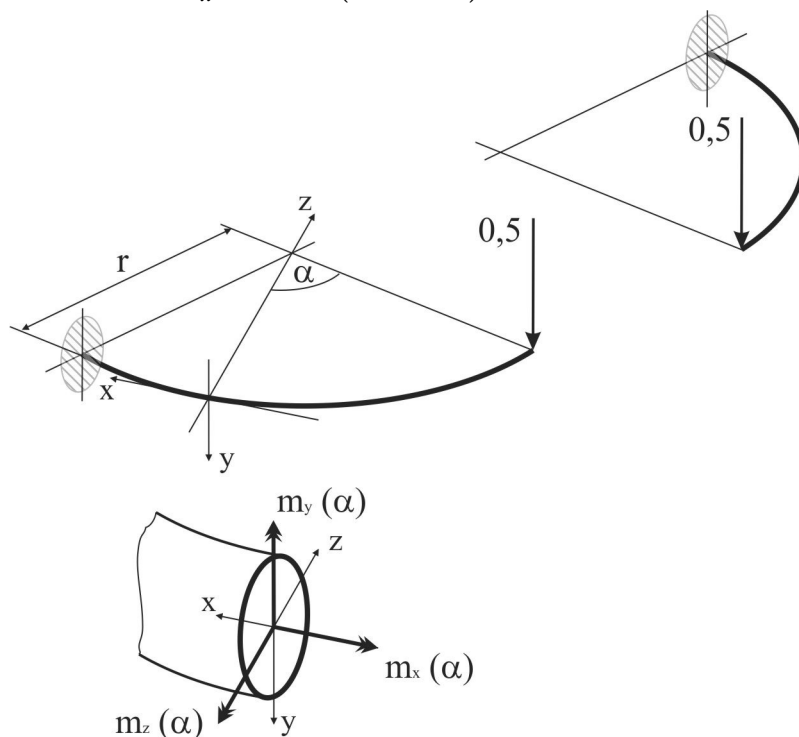


Fig. 5. Schema de încărcare diagrame deplasări

Studiu comparativ privind starea de tensiune și deformație în cazul unor elemente specifice sistemelor de vibroizolare ale mașinilor dinamice

Relația de calcul a deplasării căutate se exprimă cu ajutorul metodei energetice Maxwell-Mohr, astfel:

$$v_{\max} = \frac{1}{EI} \int m_z \cdot M_z ds + \frac{1}{GI_t} \int m_x \cdot M_x ds, \quad (0.13)$$

prin înlocuirea polinoamelor din expresiile (1.6) și (1.8) obținându-se:

$$v_{\max} = -\frac{2}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0,5 P r^3 \left(0,3183 \cdot \sin \alpha \cos \alpha - 0,5 \cdot \sin^2 \alpha \right) d\alpha - \frac{2}{GI_t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0,5 P r^3 \left[0,3183 \cdot \sin \alpha (1 - \cos \alpha) - 0,5 (1 - \cos \alpha)^2 \right] d\alpha. \quad (0.14)$$

După prelucrări [4], expresia simbolică a deplasării căutate este de forma:

$$v_{\max} = P r^3 \left(\frac{0,233549}{EI} + \frac{0,0189472}{GI_t} \right), \quad (0.15)$$

prin înlocuire cu valorile exemplului numeric propus obținându-se:

$$v_{\max} = 150 \cdot 600^3 \left(\frac{0,233549}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 18^4}{64}} + \frac{0,0189472}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 18^4}{32}} \right) = 7,7373 \text{ mm}. \quad (0.16)$$

3. ABORDARE CU METODA ELEMENTULUI FINIT

Pentru verificarea consistenței rezultatelor obținute, se va trata schema de calcul anterior prezentată cu ajutorul aplicației software Axis VM9 Student version release 3g, program de calcul ce utilizează metoda elementului finit pentru evaluarea stării de tensiune și deformație la nivelul unei structuri oarecare. Versiunea utilizată este în varianta demo, având drept limitări un număr maxim de 40 de elemente structurale, 400 de elemente de suprafață, 20 de variante de schemă de încărcare și nu mai mult de 10 moduri proprii de oscilație; chiar și pentru această versiune se poate remarca bogata colecție de profile standardizate, inclusiv STAS, precum și posibilitatea de a construi forme particulare de secțiuni utilizând diverse materiale, cu posibilitatea de a lua sau nu în calcul greutatea proprie a structurii studiate.

Schema de calcul este desemnată cu ajutorul tab-urilor geometry, elements și loads cu ajutorul cărora se modelează bara curbă de forma unui arc de cerc (geometry/arc), cu raza de curbură $r = R_m = 600 \text{ mm} = 0,6 \text{ m}$, unghi maxim de desfășurare $\alpha = 180^\circ$, materialul utilizat fiind OL37 (elements/line elements/all/material), forma secțiunii, circulară plină de diametru $d = 18 \text{ mm}$ (elements/line elements/all/cross-section/thin). Schema de rezemare (extremități încastrate), se obține (elements/nodal support), pentru ambele extremități ale semicercului, lăsând toate valorile constantelor elastice ale reacțiunilor corespunzătoare celor șase grade de libertate de valoare nemodificată ($1E+10 \text{ kN/m}$, respectiv kNm/rad). Schema de încărcare (loads/nodal loads), implică plasarea la nivelul jumătății deschiderii a unei sarcini concentrate $F_z = -0,15 \text{ kN}$, în conformitate cu sistemul de referință local al aplicației.

Ca pentru orice aplicație a metodei elementului finit, precizia rezultatului final este dată de finețea pasului de discretizare a structurii, implicit de numărul de elemente finite pentru care se face calculul, pentru un număr mare de elemente rezultatul apropiindu-se de situația reală (cu rezerva mai multor resurse consumate, timp crescut de rezolvare, încărcare semnificativă a mașinii de calcul); din tab-ul ce determină modul de discretizare al structurii (mesh/meshing of line elements/all), se alege pasul de discretizare ca funcție de unghi (mesh criterion/by angle), cu valoarea cea mai fină permisă de limitările versiunii de soft utilizate,

$\alpha = \frac{180^0}{40} = 4,5^0$ (maximum 40 de elemente finite suportate); se ajunge la schema din figura 6:

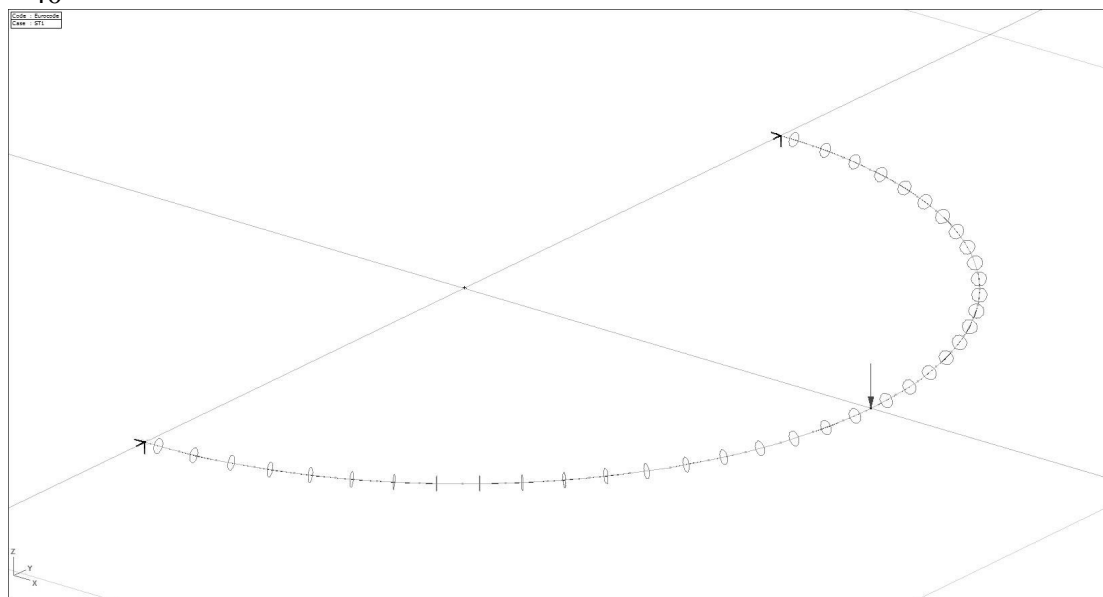


Fig. 6. Schema de calcul soft

Rezolvarea problemei se realizează cu ajutorul tab-ului de studiu liniar static (static/linear static analysis), alegându-se din modul de detaliere al rezultatelor (result display parameters), felul și modul de reprezentare al valorilor de ieșire. Astfel, pentru cazul prezentat, s-au ales modul de reprezentare tip diagramă, pentru forma nedeformată a structurii, cu precizarea tuturor valorilor măsurate sau doar a celor minimă și maximă, după caz.

Diagramele de moment încovoietor respectiv moment de torsiune se obțin din tab-ul static/beam internal forces/ M_y, T_x (aplicația nu respectă modul tradițional de notare din Rezistența Materialelor...), astfel, valorile momentului încovoietor pot fi urmărite în figura 7, în figura 8 fiind reprezentată diagrama de moment de torsiune.

Pentru evaluarea stării de tensiune la nivelul secțiunii periculoase, se utilizează tab-ul static/beam stresses/ $S_{\min \max}, V_{\min \max}, S_o_{\min \max}$, obținându-se în ordinea enumerării, conform figurilor 9, 10 și 11, valorile maximă și minimă pentru efortul unitar normal $\sigma(S_{\min \max})$, datorat solicitării de încovoiere, valorile extreme pentru efortul unitar tangențial $\tau(V_{\min \max})$, datorat în principal solicitării de torsiune, respectiv valorile extreme pentru efortul unitar normal echivalent conform criteriului de plasticitate von Mises-Hencki (punct de vedere preferat în cazul multor aplicații ce utilizează F.E.A.).

Studiu comparativ privind starea de tensiune și deformăție în cazul unor elemente specifice sistemelor de vibroizolare ale mașinilor dinamice

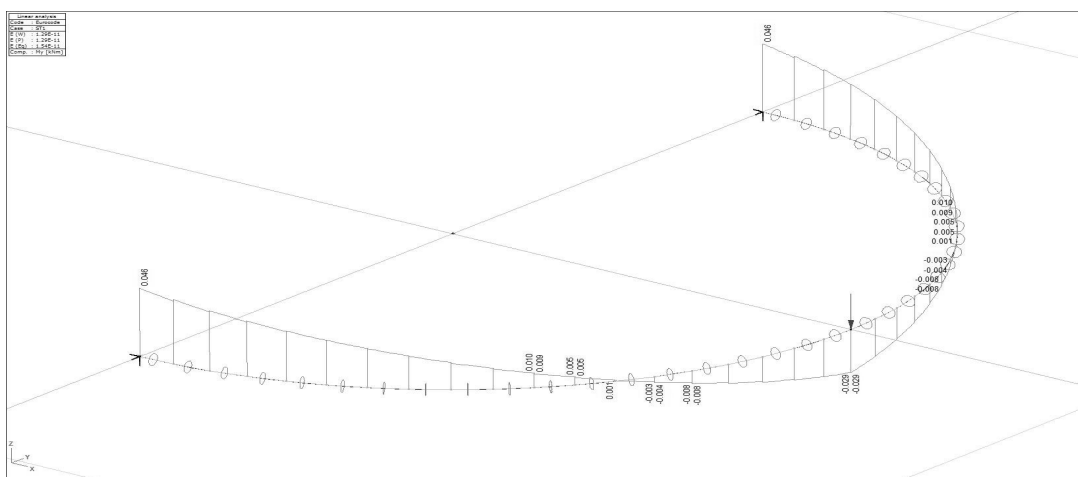


Fig. 7. Diagrama de moment încovoietor

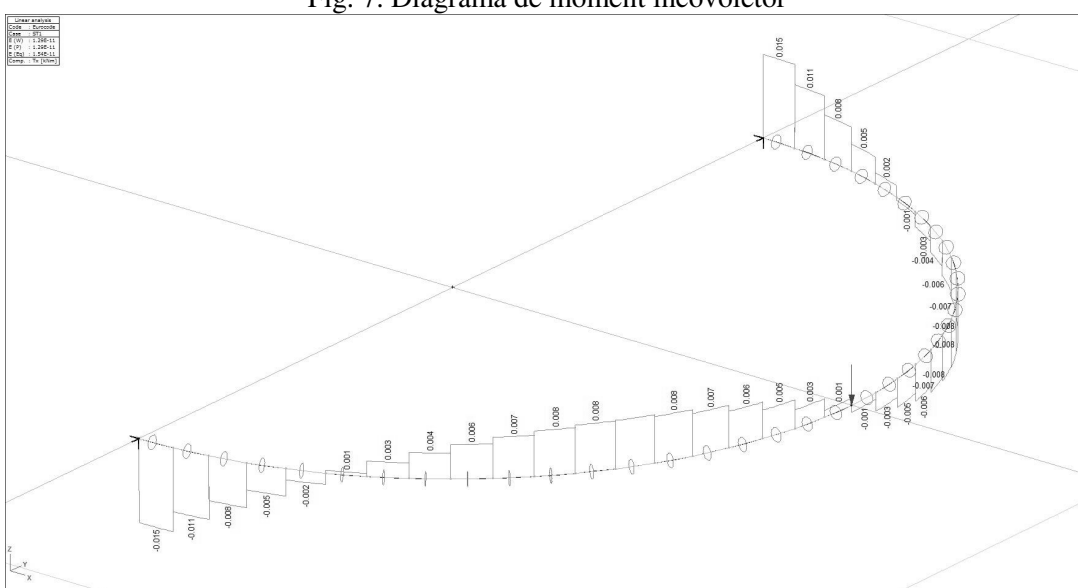


Fig. 8. Diagrama de moment de torsiune

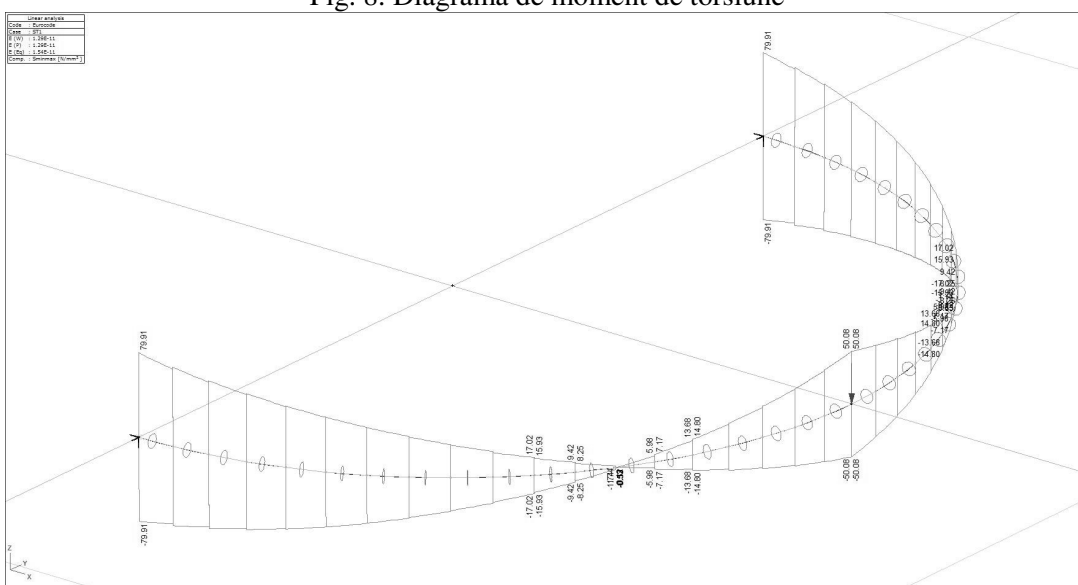


Fig. 9. Valori extreme pentru efortul unitar normal

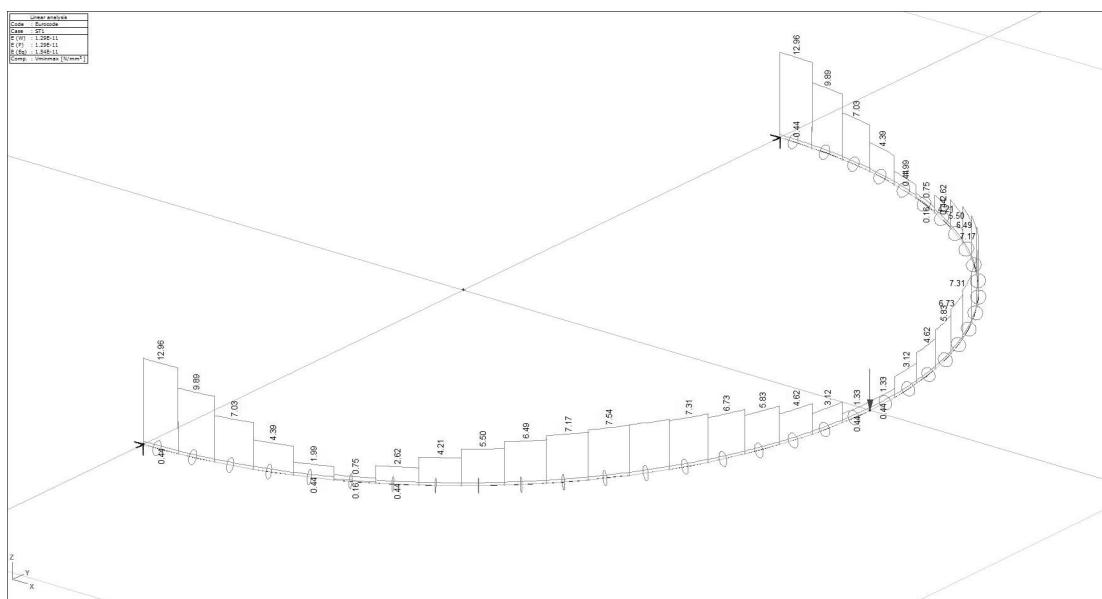


Fig. 10. Valori extreme pentru efortul unitar tangențial

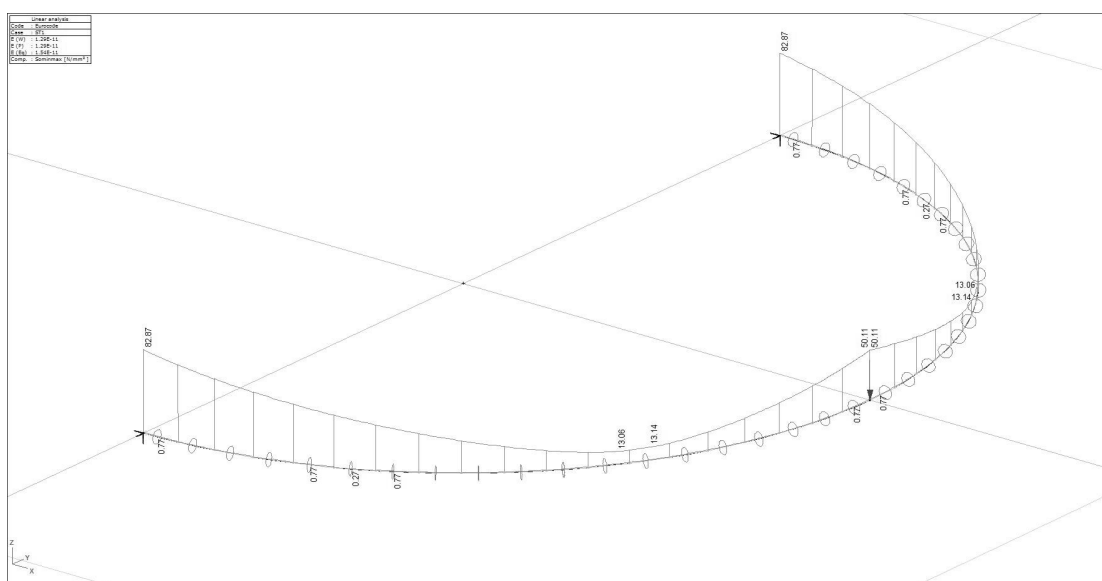


Fig.11. Valori extreme pentru efortul unitar normal echivalent (criteriul von Mises)

Ca ultim criteriu de comparație, în figura 12 a fost reprezentat modul de variație a proiecției pe verticală a deplasării punctelor componente a structurii, fiind utilizat tab-ul static/displacements/eZ, cu referire la deplasarea punctului de aplicație a sarcinii concentrate P.

Studiu comparativ privind starea de tensiune și deformație în cazul unor elemente specifice sistemelor de vibroizolare ale mașinilor dinamice

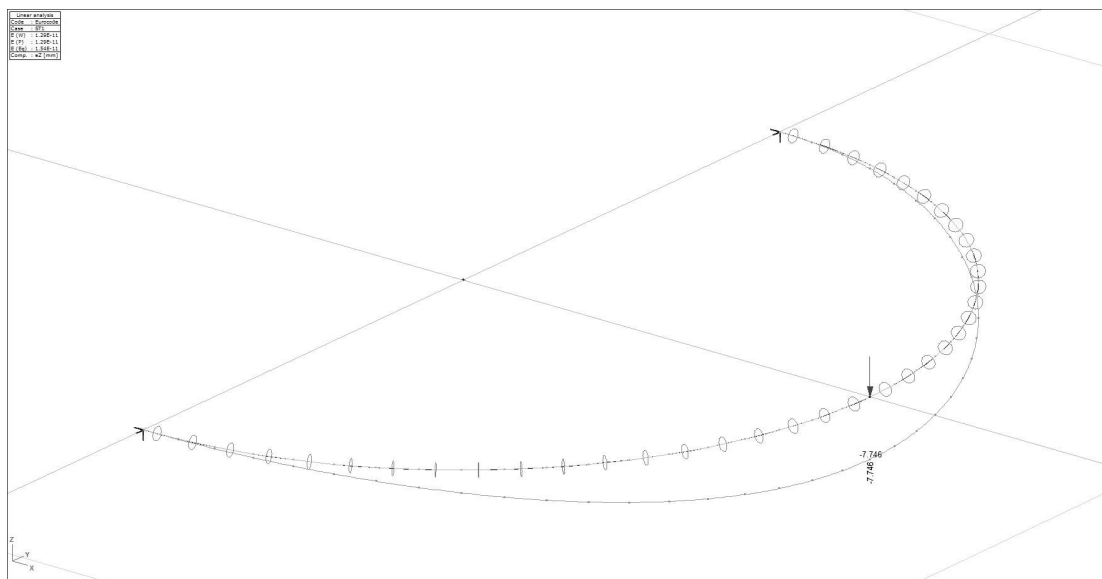


Fig. 12. Proiecția deplasării pe verticală a punctului de aplicație a forței

3. CONCLUZII

Este de remarcat gradul de convergență al rezultatelor, indiferent de criteriul de comparare admis; eroarea maximă fiind sub valoarea de două procente (tabel 3.1), cu excepția unei valori extreme de aproape unsprezece procente, aceasta survenind doar în cazul efortului unitar tangențial din solicitarea simplă de torsiune, eroare datorată în special numărului limitat de elemente discrete disponibil în cazul variantei de program de calcul utilizate (figura 10).

(tabel 3.1)

	AxisVM	D Assault	manual	eroare [%]
deplasare [mm]	7,746	(7,737)	7,737	0,12
Tresca	-	(83,3)	83,62	0,38
von Mises [MPa]	82,87	(82,8)	82,39	0,6
τ [MPa]	12,96	(15,8)	14,28	10,2
s [MPa]	79,91	(78,8)	78,59	1,7

Pentru o imagine de ansamblu, în tabelul 3.1 au fost inserate și valorile de ieșire ale aceleiași probleme, valori obținute cu ajutorul unei alte aplicații F.E.A., remarcându-se și de această dată gradul de convergență al rezultatelor obținute.

În ciuda simplității aparente, problema tratată în acest mod confirmă soluțiile clasice găsite în cadrul temelor de cercetare parcurse de-a lungul carierei, constituind în același timp și un mijloc de validare finală a diverselor soluții numerice de calcul nou apărute.

REFERINȚE

- [1] **DEUTSCH I.** , „Rezistența materialelor”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [2] **UNGUREANU I., ISPAS B., CONSTANTINESCU E.** , „Rezistența materialelor”, vol.II, Institutul de Construcții București, 1981.
- [3] **FEODOSIEV V.I.** , „Selected problems and questions in Strength of Materials”, MIR Publishers Moscow, 1977.
- [4] **LUZIN N.N.** , „Calcul diferențial”, Editura Tehnică, București, 1954.
- [5] **VIGODSKI M.** , „Mathematical Handbook”, MIR Publishers Moscow, 1975.
- [6] **POPOV E.P.** , „Mechanics of Materials”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [7] **ANDREESCU I., MOCANU ȘT.** , „Compendiu de Rezistența Materialelor”, Matrix Rom, București, 2005.