

**STUDIU PRIVIND OPTIMIZAREA SCHEMEI DE ÎNCĂRCARE,  
DIN PUNCTUL DE VEDERE A STĂRII DE EFORT ȘI DEFORMAȚIE,  
PENTRU UN INEL ARTICULAT SUPUS COMPRESIUNII  
PE DIRECȚIE DIAMETRALĂ**

**STRESS AND DEFLECTION STATE EVALUATION STUDY CONCERNING THE  
FLEXIBILITY VERSUS LOADING SCHEME OPTIMIZATION FOR A HINGED  
RING CASE**

**Ș. I. dr. ing. Ștefan Mocanu**

Universitatea Tehnică de Construcții București  
B-dul Lacul Tei 124, sector 2 RO-72302, Romania  
e-mail: mocanu\_stefan@hotmail.com

**Rezumat:** *Dat fiind cazul unui inel articulat supus compresiunii pe direcție diametrală, se remarcă intuitiv dependența magnitudinii deformațiilor de schema de încărcare utilizată; scopul articolului de față este de a prezenta algoritmul clasic de calcul pentru estimarea stării de efort și deformație ca funcție de schema de încărcare, în scopul minimizării deformațiilor obținute. Rezultatele obținute sunt comparate cu mărimile finale oferite de metode numerice alternative.*

**Cuvinte cheie:** *bară curbă, Maxwell-Mohr, AxisVM.*

**Abstract:** *Suppose you have a hinged ring in your hand; you compress it along a diameter and notice that the flexibility of the ring varies depending on the particular diameter along which the compression is produced. The present paper is focused on elementary strength of materials calculus concerning flexibility versus loading scheme optimisation.*

**Keywords:** *curved beam, Maxwell-Mohr, AxisVM.*

## **1. INTRODUCERE**

În cadrul procesului didactic, un loc aparte îl ocupă așa-numitele probleme simple care, plecând de la un enunț aparent "prietenos", permit tratarea unor chestiuni de mare importanță pentru capitolul respectiv. Un astfel de exemplu, cu referire la capitolul deformațiilor barelor curbe de curbură mică, este tratat în continuare, scopul articolului fiind de a prezenta algoritmul clasic de calcul pentru evaluarea stării de efort și deformație ca funcție de schema de încărcare, cu optimizare în sensul minimizării deformațiilor obținute. Pentru verificarea gradului de dispersie al rezultatelor obținute, algoritmul clasic a fost completat de tratarea aceleiași probleme cu metoda elementului finit.

## **2. ABORDARE CLASICĂ. SCHEMA DE CALCUL**

Pentru parcurgerea etapei de calcul a fost utilizat sistemul static nedeterminat [1] din figura 1a., structură de forma unui inel o dată articulată, supus acțiunii unui sistem de forțe ce

acționează diametral opus – se ajunge la bara curbă de forma unui cerc, încărcată cu un sistem de sarcini concentrate [1,2] de intensitate P, sarcini ce acționează în planul format de bară, r reprezentând raza medie de curbură [1,2] a barei curbe, d- diametrul secțiunii de formă circulară plină. Pentru exemplul numeric au fost utilizate valorile: P = 10kN, d = 50mm, r = 1000mm, E = 2,1·10<sup>5</sup>N/mm<sup>2</sup>, cazul fiind situat în domeniul barelor curbe de curbură mică ( $\frac{R_m}{h} = \frac{r}{d}; \frac{1000}{50} = 20 > 10$ ) [2, 7].

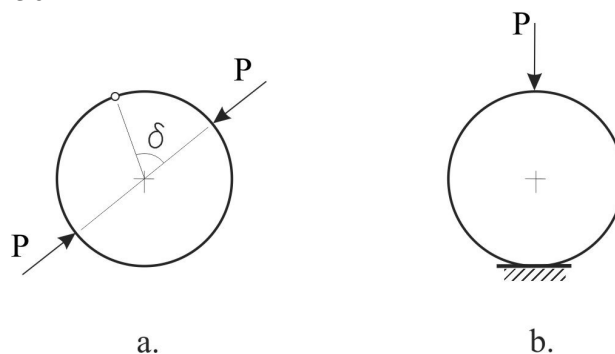


Fig. 1. Schema de calcul

Pentru tratarea problemei este necesară ridicarea nedeterminării sistemului; în vederea utilizării unei forme de bază [2], ce ține seama de simetria schemei de rezemare și încărcare, se folosește schema de calcul simplificată din figura 1b.

Gradul de nedeterminare al structurii este n = 3 [2], fiind necesară găsirea unui număr teoretic de trei necunoscute, algoritmul de rezolvare fiind ”metoda eforturilor” [2], cu utilizarea formei de bază din figura 2.

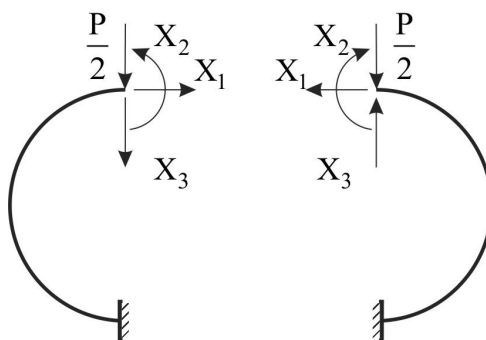


Fig. 2. Forma de bază

Metoda implică rezolvarea unui sistem de ecuații de continuitate (1.1), ecuații exprimate în formă canonică, numărul de ecuații al sistemului fiind egal cu gradul de nedeterminare a structurii inițiale; fiecare ecuație a sistemului reprezintă deplasarea pe direcția fiecărei necunoscute în parte ( $X_i$ ), deplasare datorată tuturor celorlalte necunoscute, precum și sistemului de sarcini inițiale ce formează schema de încărcare [2].

Studiu privind optimizarea schemei de încărcare, din punctul de vedere a stării de efort și deformație, pentru un inel articulată supus compresiunii pe direcție diametrală

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{10} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{20} = 0; \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{30} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

Pentru determinarea termenilor caracteristici ai ecuațiilor sistemului (1.1) se utilizează metoda energetică Maxwell-Mohr [2,7], din șirul de termeni ai relației păstrând doar pe cei cu referire la solicitarea de încovoiere, fapt datorat ponderii semnificative a acestei solicitări în defavoarea restului termenilor ce compun expresia (cazul sistemului de bare încărcat în planul său)[3,6,7].

Se exprimă (figura 3), polinoamele de variație în lungul barei pentru eforturile secționale de tip moment încovoiător, încărcând pe rând forma de bază, în exclusivitate, cu necunoscutele  $X_i = 1$  (obținând, după caz, polinoamele pentru diagramele  $m_i$ ), respectiv cu sarcini inițiale (diagrama  $M_0$ )[7].

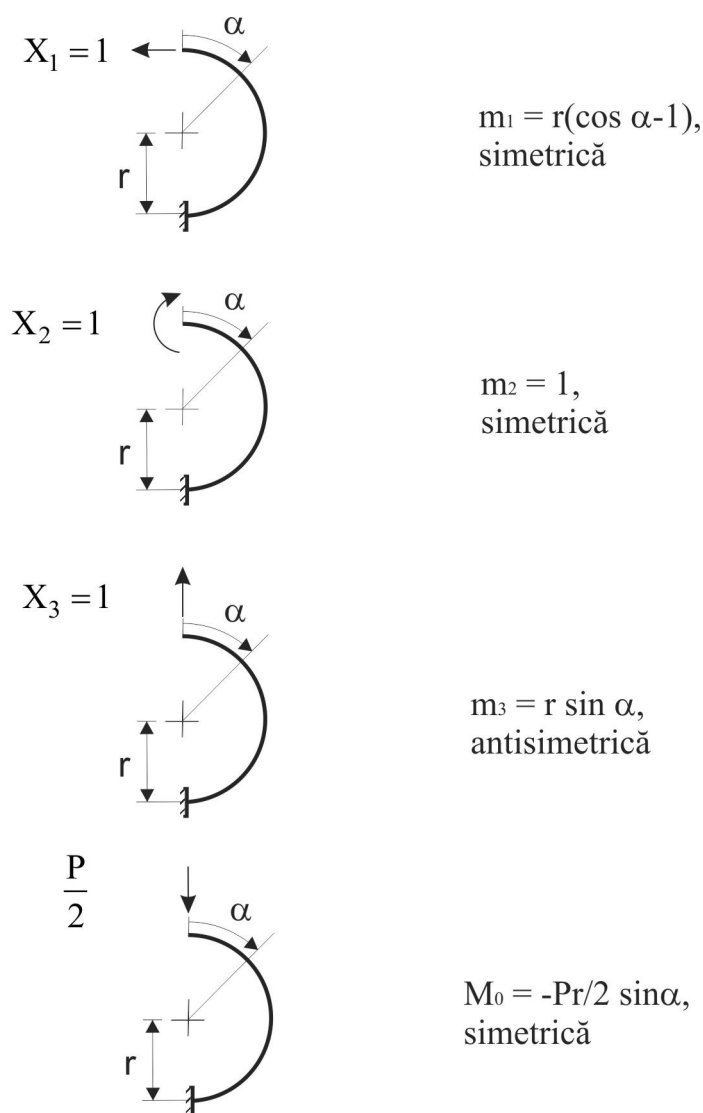


Fig. 3. Polinoame diagrame de moment

Este de remarcat faptul că, datorită particularităților schemei de calcul și a caracteristicilor de simetrie sau antisimetrie a diagramelor obținute, sistemul de ecuații inițial (1.1) se rescrie în forma ( $X_3 = 0$ ):

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{10} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{20} = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

sistem ai cărui termeni caracteristici se determină cu formula Maxwell-Mohr, astfel:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} r^2 (\cos \alpha - 1)^2 \cdot r d\alpha; \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} r (\cos \alpha - 1) \cdot r d\alpha; \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} r d\alpha; \\ \Delta_{10} &= \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} \frac{Pr^3}{2} (1 - \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha; \\ \Delta_{20} &= -\frac{1}{EI} \frac{Pr^2}{2} \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha, \end{aligned} \quad (1.3)$$

după prelucrări:

$$\begin{aligned} EI \delta_{11} &= 4,7124 r^3; \\ EI \delta_{12} &= EI \delta_{21} = -\pi r^2; \\ EI \delta_{22} &= \pi r; \\ EI \Delta_{10} &= Pr^3; \\ EI \Delta_{20} &= -Pr^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Prin substituirea termenilor caracteristici (1.4) în sistemul de ecuații de continuitate (1.2), se obțin valorile necunoscutelor, de forma:

$$X_1 = 0; \quad X_2 = \frac{Pr}{\pi}, \quad X_3 = 0,3183 Pr. \quad (1.5)$$

Legea de variație a polinomului momentului încovoietor final (1.6), se obține prin încărcarea simultană a formei de bază cu necunoscutele calculate și sistemul de sarcini inițial (figura 4), astfel:

Studiu privind optimizarea schemei de încărcare, din punctul de vedere a stării de efort și deformație, pentru un inel articulat supus compresiunii pe direcție diametrală

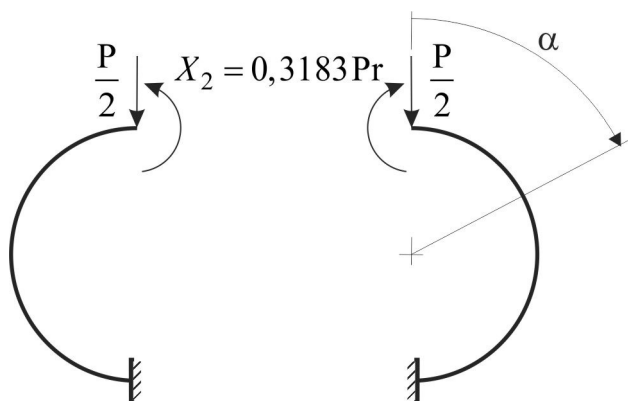


Fig. 4. Schema de încărcare finală

$$M = Pr \left( \frac{1}{\pi} - \frac{\sin \alpha}{2} \right). \quad (1.6)$$

Prin egalarea cu zero a ecuației (1.6) și rezolvarea acesteia în raport cu variabila  $\alpha$ , se obține punctul de anulare a diagramei de moment încovoietor (figura 5):

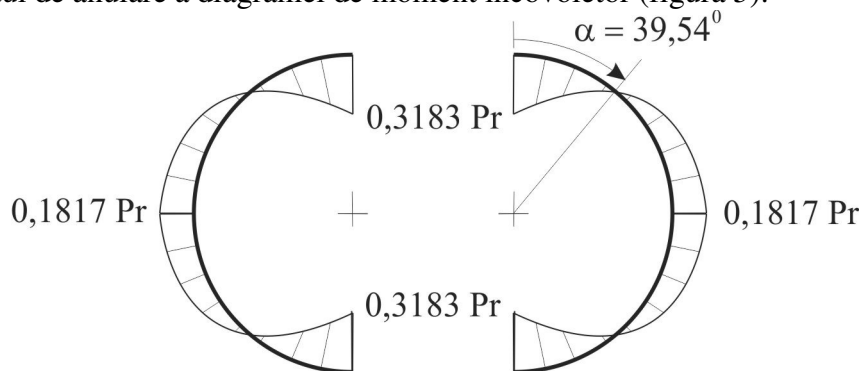


Fig. 5. Diagrama finală de moment încovoietor

Pentru studiul caracteristicilor de rigiditate ale structurii se poate admite drept criteriu de comparație valoarea proiecției pe direcția sarcinii inițiale P a deplasării punctului de aplicație al acesteia; se încarcă forma de bază, în exclusivitate, cu o sarcină virtuală unitară de natura și pe direcția deplasării căutate (figura 6), obținându-se astfel expresia diagramei de moment  $m_0$  (1.7).

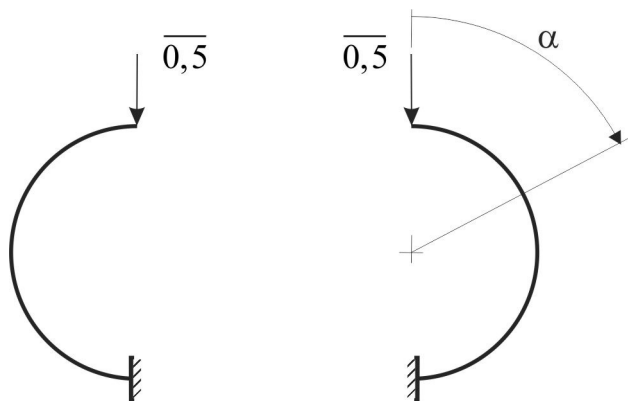


Fig. 6. Schema de încărcare pentru calculul deplasării

$$m_0 = -\frac{1}{2} r \sin \alpha. \quad (1.7)$$

Relația de calcul a deplasării căutate se exprimă cu ajutorul metodei energetice Maxwell-Mohr, astfel:

$$v_{\max} = \frac{1}{EI} \int m_0 \cdot M ds, \quad (1.8)$$

prin înlocuirea polinoamelor din expresiile (1.6) și (1.8) obținându-se:

$$v_{\max} = P r^3 \int_0^\pi \left( \frac{\sin^2 \alpha}{2} - \frac{\sin \alpha}{\pi} \right) d\alpha. \quad (1.9)$$

După prelucrări [4], expresia simbolică a deplasării căutate este de forma:

$$v_{\max} = P r^3 \frac{0,1488}{EI}, \quad (1.10)$$

iar prin înlocuire cu valorile exemplului numeric propus:

$$v_{\max} = 0,1488 \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1000^3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 50^4}{64}} = 23,1 \text{ mm}. \quad (1.11)$$

### 3. ABORDARE CU METODA ELEMENTULUI FINIT

Pentru verificarea consistenței rezultatelor obținute, se va trata schema de calcul anterior prezentată cu ajutorul aplicației software Axis VM9 Student version release 3g, program de calcul ce utilizează metoda elementului finit pentru evaluarea stării de tensiune și deformație la nivelul unei structuri oarecare. Versiunea utilizată este în varianta demo, având drept limitări un număr maxim de 40 de elemente structurale, 400 de elemente de suprafață, 20 de variante de schemă de încărcare și nu mai mult de 10 moduri proprii de oscilație; chiar și pentru această versiune se poate remarca bogata colecție de profile standardizate, inclusiv STAS, precum și posibilitatea de a construi forme particulare de secțiune utilizând diverse materiale, cu posibilitatea de a lua sau nu în calcul greutatea proprie a structurii studiate.

Schema de calcul este desemnată cu ajutorul tab-urilor geometry, elements și loads cu ajutorul cărora se modelează bara curbă de forma unui arc de cerc (geometry/arc), cu raza de curbura  $r = R_m = 1000 \text{ mm} = 1 \text{ m}$ , unghi maxim de desfășurare  $\alpha = 360^\circ$ , materialul utilizat fiind OL37 (elements/line elements/all/material), forma secțiunii, circulară plină de diametru  $d = 50 \text{ mm}$  (elements/line elements/all/cross-section/thin).

Schema de rezemare (extremitate inferioară încastrată), se obține (elements/nodal support), păstrând toate valorile constantelor elastice ale reacțiunilor corespunzătoare celor șase grade de libertate de valoare nemodificată ( $1E+10 \text{ kN/m}$ , respectiv  $\text{kNm/rad}$ ). Schema de încărcare (loads/nodal loads), implică plasarea la nivelul superior al inelului a unei sarcini concentrate  $F_z = -10 \text{ kN}$ , în conformitate cu sistemul de referință local al aplicației.

Ca pentru orice aplicație a metodei elementului finit, precizia rezultatului final este dată de finețea pasului de discretizare a structurii, implicit de numărul de elemente finite pentru care se face calculul, pentru un număr mare de elemente rezultatul apropiindu-se de situația reală (cu rezerva mai multor resurse consumate, timp crescut de rezolvare, încărcare

## Studiu privind optimizarea schemei de încărcare, din punctul de vedere a stării de efort și deformație, pentru un inel articulat supus compresiunii pe direcție diametrală

semnificativă a mașinii de calcul); din tab-ul ce determină modul de discretizare al structurii (mesh/meshing of line elements/all), se alege pasul de discretizare ca funcție de unghi (mesh criterion/by angle), cu valoarea cea mai fină permisă de limitările versiunii de soft utilizate,

$$\alpha = \frac{360^0}{40} = 9^0 \text{ (maximum 40 de elemente finite suportate) – figura 7.}$$

Rezolvarea problemei se realizează cu ajutorul tab-ului de studiu liniar static (static/linear static analysis), alegându-se din modul de detaliere al rezultatelor (result display parameters), felul și modul de reprezentare al valorilor de ieșire. Astfel, pentru cazul prezentat, s-au ales modul de reprezentare tip diagramă, pentru forma nedeformată a structurii, cu precizarea tuturor valorilor măsurate sau doar a celor minimă și maximă, după caz.

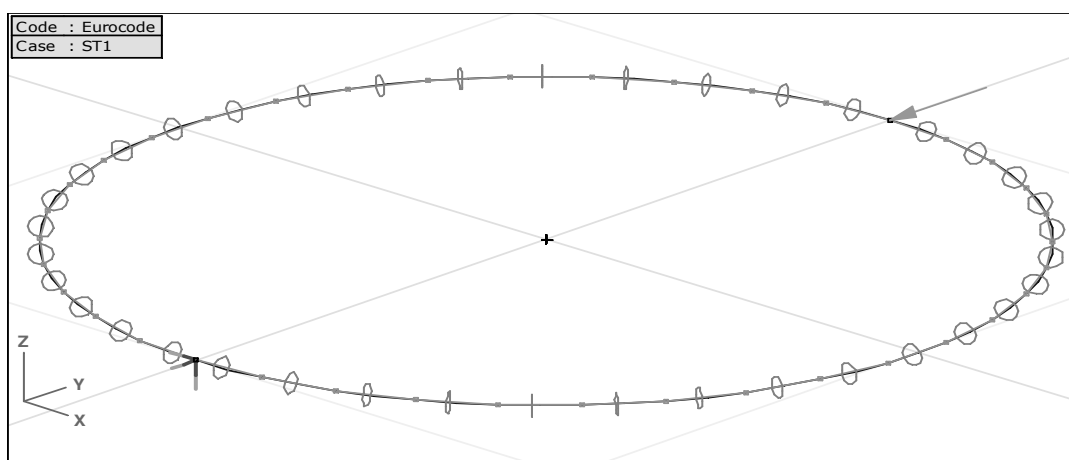


Fig. 7. Schema de calcul soft

Diagrama de moment încovoietor se obține din tab-ul static/beam internal forces/ $M_z$ , astfel, modul de variație a polinomului moment  $M$  este conform figurii 8:

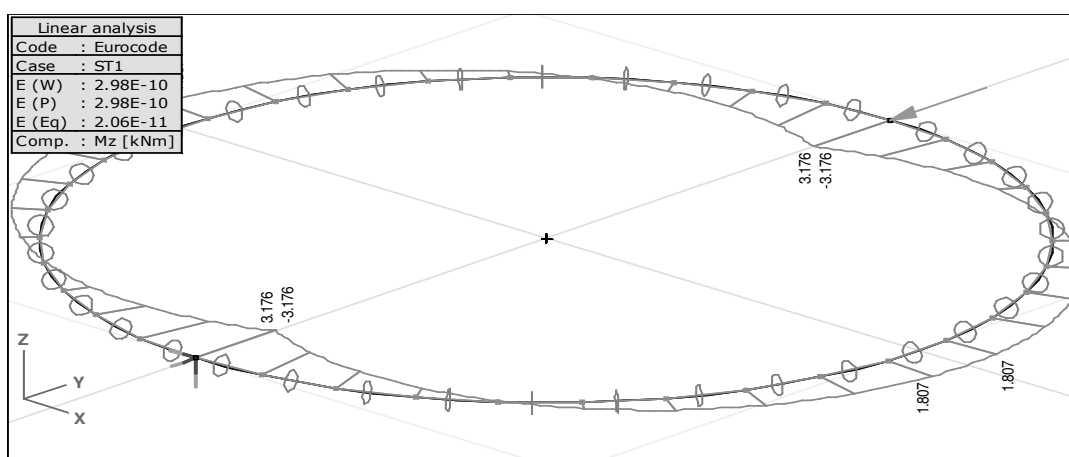


Fig. 8. Diagrama de moment încovoietor

Pentru aprecierea comportamentului structurii din punctul de vedere al rigidității, în figura 9 a fost reprezentat modul de variație a proiecției pe direcția  $Oy$  (sistemul local al

aplicației numerice), a deplasării punctelor componente ale structurii, fiind utilizat tab-ul static/displacements/eY, cu referire la deplasarea punctului de aplicație a sarcinii concentrate P.

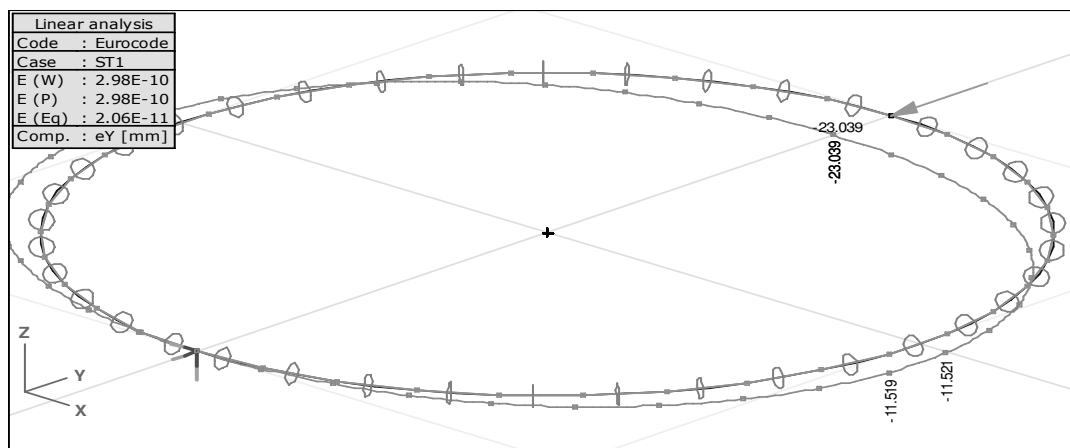


Fig. 9. Proiecția deplasării pe direcție Oy

### 3. CONCLUZII

Pentru optimizarea structurii din punctul de vedere al rigidității acesteia, interesează valoarea unghiului  $\delta$  (figura 1a.) de poziționare a articulației intermediare a inelului, în raport cu direcția de aplicare a sistemului de sarcini inițiale; se poate presupune faptul că proiecția deplasării pe direcția de aplicare a forțelor este minimă pentru  $\delta = 39,54^0$  (figurile 5,10) [7,2]. Într-adevăr, pentru valoarea particulară dată a unghiului  $\delta$ , se obține o valoare a deplasării  $v_{max}$  identică cu cea corespunzătoare pentru sistemul fără articulație (figura 9).

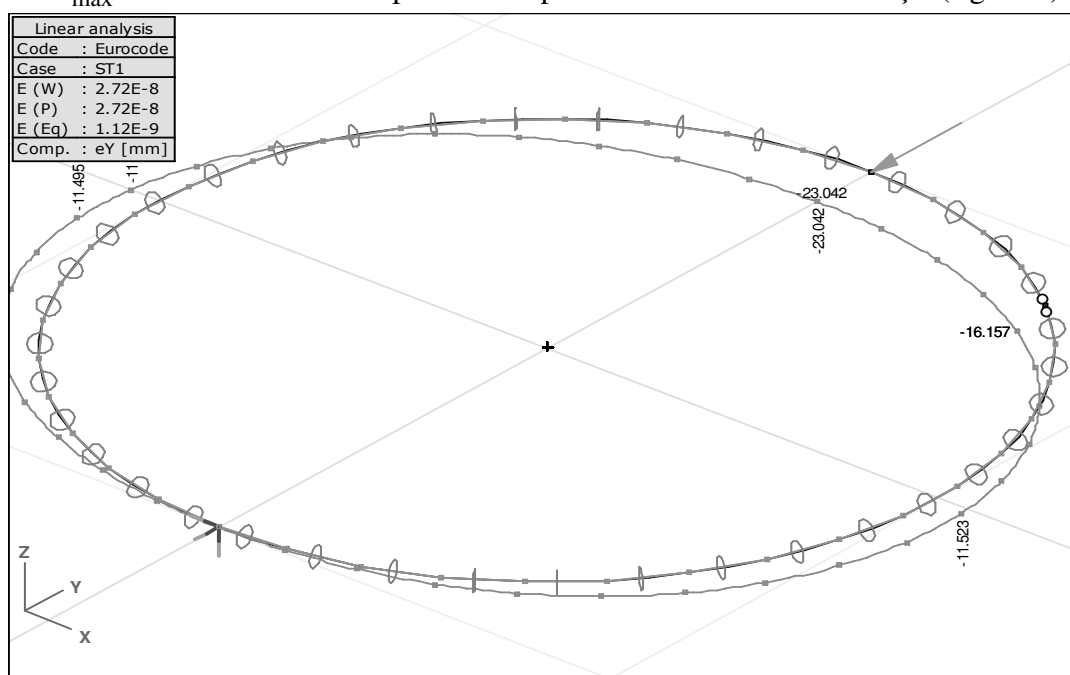


Fig. 10. Proiecția deplasării pe direcție Oy, cu articulație la  $\delta = 39,54^0$



Studiu privind optimizarea schemei de încărcare, din punctul de vedere a stării de efort și deformație, pentru un inel articulată supus compresiunii pe direcție diametrală

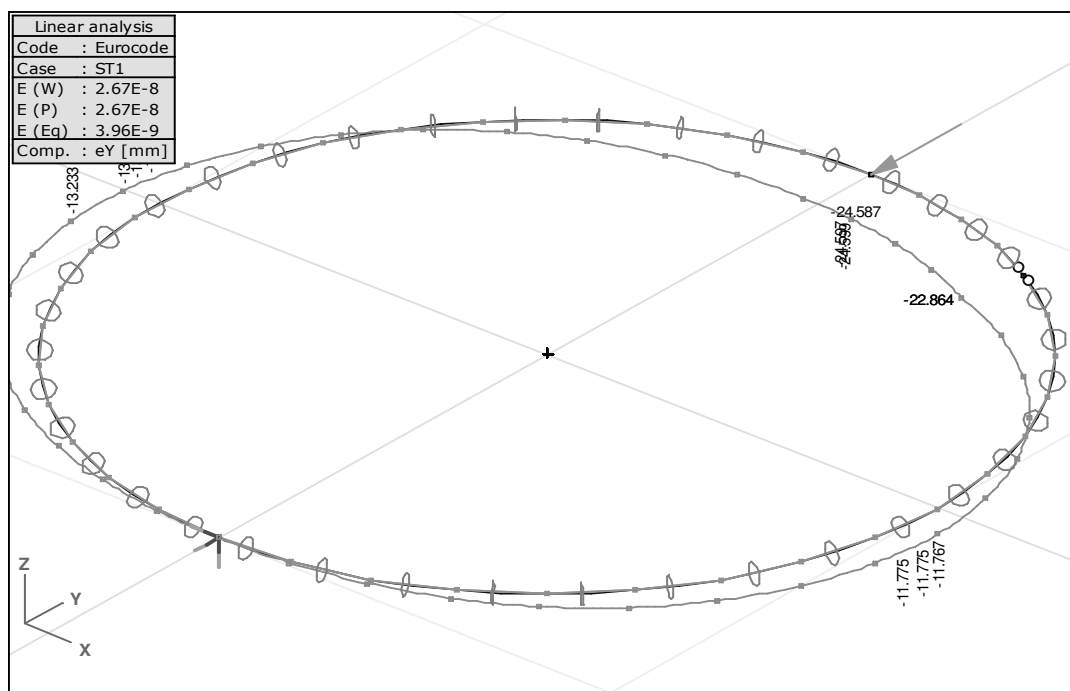


Fig. 11. Proiecția deplasării pe direcție  $Oy$ , cu articulație la  $\delta = 30^0$

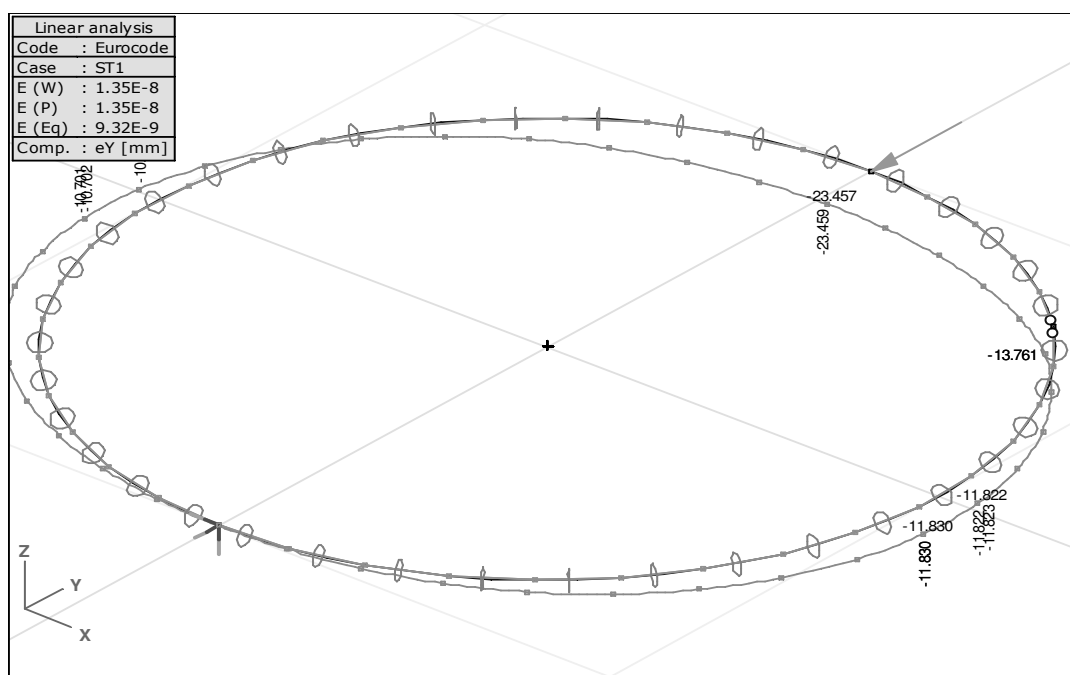


Fig. 12. Proiecția deplasării pe direcție  $Oy$ , cu articulație la  $\delta = 45^0$

Datorită gradului de libertate suplimentar introdus de prezența articulației intermediare, plasarea acesteia în oricare secțiune în care există moment încovoietor, implică existența unei rotiri relative între tronsoanele articulate.

În cazul existenței articulației în altă poziție decât cea stabilită prin calcul (chiar la nivelul secțiunii în care diagrama de moment încovoietor este nulă), se remarcă valori majorate ale deplasării  $v_{max}$  (figurile 11, 12), cu implicațiile de rigoare.

În pofida simplității aparente, problema tratată în acest mod confirmă algoritmul tradițional de calcul (metoda eforturilor, metoda energetică Maxwell-Mohr), constituind în același timp și un mijloc de verificare a diverselor soluții numerice de calcul.

#### REFERINȚE

- [1] DEUTSCH I. , „Rezistența materialelor”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [2] UNGUREANU I., ISPAS B., CONSTANTINESCU E. , „Rezistența materialelor”, vol.II, Institutul de Construcții București, 1981.
- [3] FEODOSIEV V.I. , „Selected problems and questions in Strength of Materials”, MIR Publishers Moscow, 1977.
- [4] LUZIN N.N. , „Calcul diferențial”, Editura Tehnică, București, 1954.
- [5] VIGODSKI M. , „Mathematical Handbook”, MIR Publishers Moscow, 1975.
- [6] POPOV E.P. , „Mechanics of Materials”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [7] ANDREESCU I., MOCANU ȘT. , „Compendiu de Rezistența Materialelor”, Matrix Rom, București, 2005.