

CINEMATICA OSIEI LA CIRCULAȚIA ÎN CURBĂ

KINEMATICS OF THE WHEELSET DURING CURVE NEGOTIATION

Asist. drd. ing. Mădălina DUMITRIU

Universitatea Politehnică din București
Splaiul Independenței, nr. 313, 060042, București, Romania
e-mail: madalinadumitriu@yahoo.com

Rezumat. Această lucrare se ocupă cu cinematica osiei la traversarea unei curbe circulare. Sunt tratate în mod particular viteza și accelerația centrului de masă al osiei. De asemenea, sunt calculate vitezele de alunecare dintre roți și șine. Este analizat din punct de vedere cinematic regimul cvasistatic de circulație în curbă. Sunt stabilite condițiile rostogolirii pure, precum și cele ale rulării conice.

Cuvinte cheie: osie, cinematică, curba, alunecare

Abstract. This paper deals with the kinematics of the wheelset during curve negotiation. The velocity and the acceleration of the wheelset centroid are calculated. Also, the slip velocities between the wheels and rails are determined. The steady-state behaviour is analysed from kinematics view point. The pure rolling and conic rolling conditions are pointed out.

Keywords: wheelset, kinematics, curve, slip

1. INTRODUCERE

La traversarea unei curbe circulare, mișcarea osiei este complexă ea fiind rezultatul compunerii a mai multor mișcări de rotație și de translație. Ne referim la mișcarea de rotație în jurul centrului curbei care se compune cu mișcările proprii de rotație ale osiei: mișcarea de revoluție în jurul axei osiei, mișcarea de rotație în jurul axei verticale care este o rotație asociată mișcării de șerpuire și rotația în jurul axei longitudinale – mișcarea de ruluire a osiei. Totodată, osia poate efectua în raport cu axa căii o mișcare de translație paralelă cu planul căii – așa – numita mișcare de clătinare, care atrage după sine și o mișcare de ridicare datorită legăturii geometrice dintre roți și șine și datorită formei profilurilor de rulare. Trebuie observat faptul că, din același motiv, și mișcarea de ruluire este o consecință a mișcării de clătinare. În principiu, acceptând că mișcarea de traversare a curbei se efectuează cu viteză constantă, atunci mișcarea de recul (translație longitudinală) poate fi eliminată din calcul.

Studii privind cinematica osiei au fost elaborate încă din a doua parte a secolului al XIX –lea și în acest sens pot fi menționate lucrările lui Redtenbacher [1] care a făcut prima analiză teoretică a cinematicii osiei în curbă considerând o osie cu roți conice și deducând condiția rulării conice (fără alunecări longitudinale), Bodecker [2] și Klingel [3] care au explicat mișcarea de șerpuire a vehiculului plecând de la cinematica osiei. Mai târziu, Bäseler [4] și Pawelka [5] au introdus procedee de calcul a vitezelor de alunecare a roților pe șine la circulația în curbă bazate fie pe utilizarea conului de rostogolire, fie pe cea a conului de rulare. Rezultatele studiului cinematicii osiei sunt aplicate în numeroare lucrări dedicate circulației în curbă a vehiculelor feroviare [6 - 9] și studiului mișcării de șerpuire a acestora [10-13]. De asemenea, cinematica osiei este necesară pentru evaluarea prin simulări pe stand a instabilității vehiculelor feroviare sau a pierderii adeziunii roată-șină.

În această lucrare sunt tratate într-o manieră originală principalele aspecte cinematice legate de traversarea unei curbe circulare de către o osie. Rezultatele obținute sunt apoi particularizate pentru cazul în care sectorul de cale este în aliniament.

Analiza cinematică a osiei interesează din mai multe puncte de vedere. Pe de o parte, este nevoie să se cunoască viteza și accelerația centrului de masă al osiei, precum și viteza și accelerația unghiulară pentru a putea să se stabilească forțele și momentele de inerție ale osiei. Pe de altă parte, vitezele de alunecare dintre roți și șine determină mărimea și orientarea forțelor de frecare dintre roți și șine. De asemenea, trebuie menționat faptul că vitezele de alunecare condiționează lucrul mecanic al forțelor de frecare și, prin aceasta, potențialul de uzare a suprafețelor de rulare.

2. SISTEME DE REFERINȚĂ

Se consideră o osie care traversează cu viteza constantă V o curbă circulară de rază R și supraînălțare constantă h . Se presupune că osia și șinele pe care aceasta rulează sunt perfect rigide și deci contactul dintre roți și șine este de tip punctiform, iar profilurile de rulare sunt simetrice. Totodată, având în vedere faptul că deformațiile elastice ale șinelor sunt mult mai mici decât jocul osiei în cale, se va neglija elasticitatea căii. Se va considera că axa căii prezintă abateri în plan orizontal de la forma ideală.

Figura 1 prezintă osia și calea de rulare care este înclinată cu unghiul ϕ față de planul orizontal. Cele două fire ale căii fiind distanțate cu $2e$, rezultă că unghiul de înclinare al căii satisface relația

$$\sin \phi = \frac{h}{2e}. \quad (1)$$

În axa nedeformată a căii, la înălțimea h_o de planul acesteia, se atașează sistemul de referință $Oxyz$ care se deplasează o dată cu osia. Axa Ox este în lungul căii iar axa Oy este paralelă cu planul acesteia urmând o direcție radială. Axa Oz rezultă din condiția de perpendicularitate pe celelalte două axe.

În centrul de masă al osiei se atașează sistemul $Gper$, cu axa Ge în lungul axei osiei, axa Gp în lungul căii, iar axa Gr perpendiculară pe cale. Când osia este în poziție mediană față de cale, cele două referențiale coincid. Remarcăm faptul că osia se rotește față de reperul $Gper$ în jurul axei Ge cu un unghi θ^* monoton crescător. În consecință, se mai atașează referențialul $G^*p^*e^*r^*$ solidar legat cu osia, având axa G^*e^* identică cu Ge .

Întrucât se adoptă ipoteza că osia se mișcă cu viteza constantă V , centrul ei de masă se va afla permanent în planul vertical transversal Oyz . În raport cu sistemul de referință $Oxyz$, osia ocupă o poziție decalată transversal cu y și rotită cu unghiul de atac α în raport cu poziția radială. Datorită decalajului transversal al osiei, axa acesteia este înclinată cu unghiul de ruluu ϕ , iar centrul de masă este ridicat cu z . Mișcarea de revoluție a osiei se face în jurul axei sale cu viteza unghiulară $\dot{\theta}^* = V/r_o + \dot{\theta}$, unde r_o este raza cercurilor de rulare când osia este în poziție mediană, iar $\dot{\theta}$ este alunecarea unghiulară. Totodată, osia are o mișcare de rotație cu unghiul ψ în jurul centrului curbei. Aici se află sistemul de referință fix $O_{o^*}x_{o^*}y_{o^*}z_{o^*}$.

Contactul dintre roți și șine are loc în punctele $A_1(p_1, e_1, -r_1)$ și $A_2(-p_2, -e_2, -r_2)$, unde indicele '1' indică contactul de pe firul exterior, iar indicele '2', contactul de pe firul interior. Coordonatele punctelor de contact sunt date în raport cu referențialul $Gper$.

Cinematica osiei la circulația în curbă

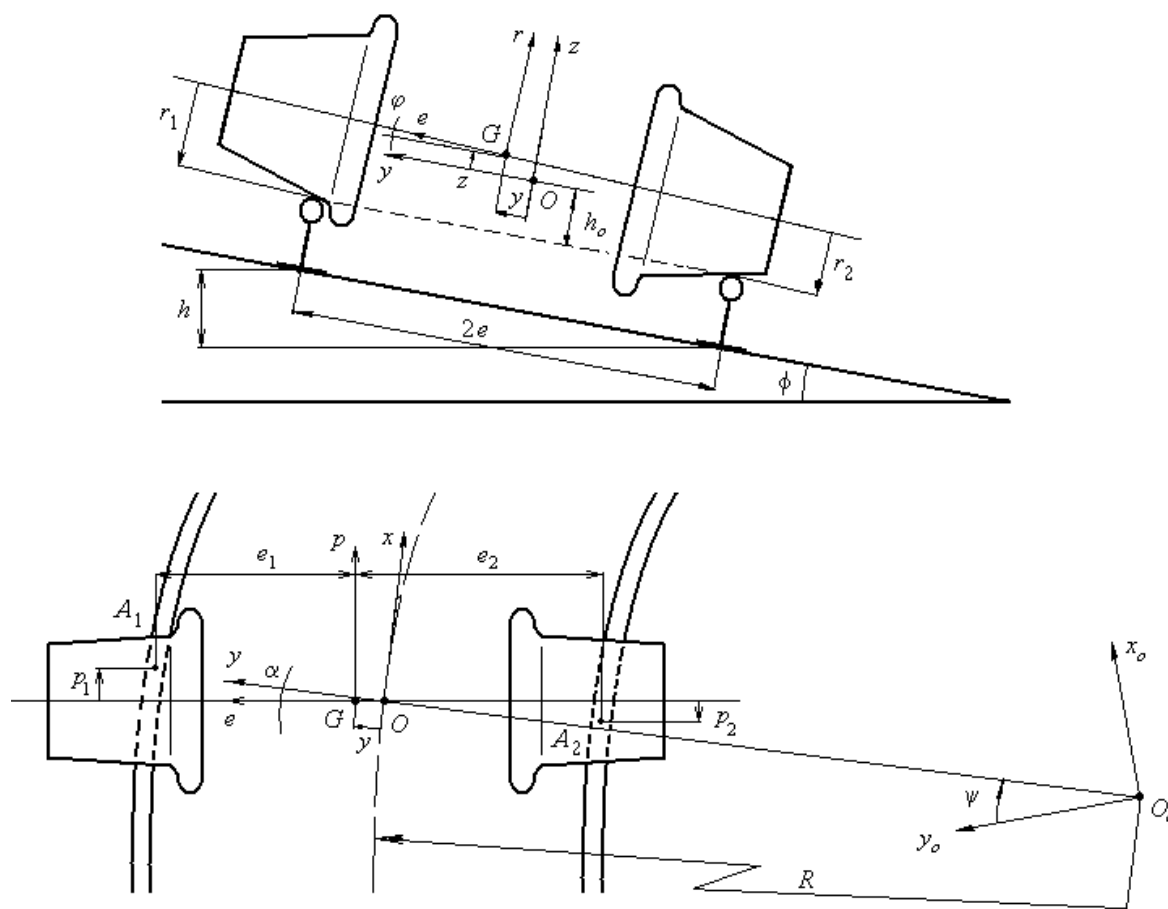


Fig. 1. Osia în curbă.

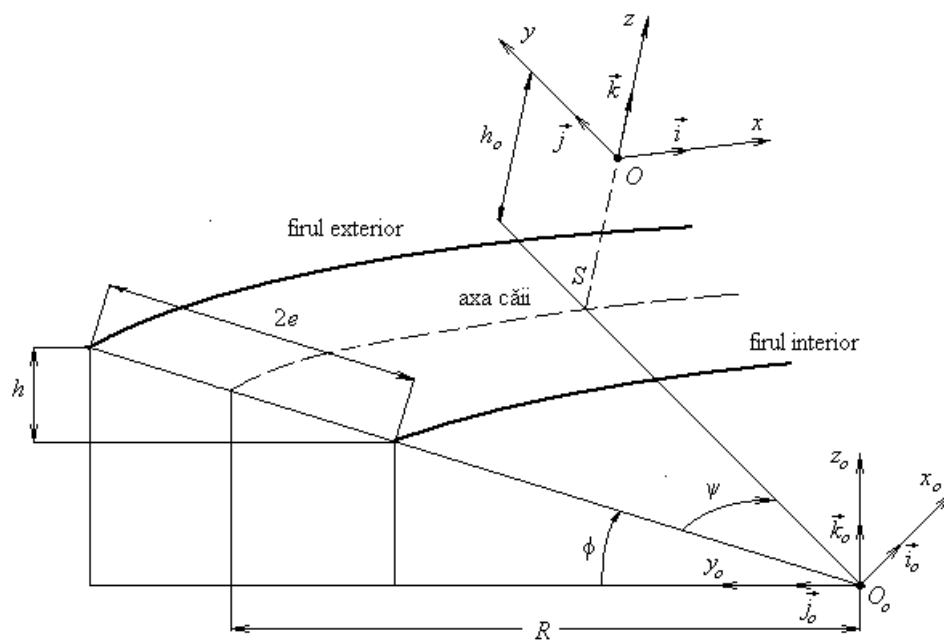


Fig. 2 Sistemele de referință ale căii

O situație detaliată cuprinzând elementele geometrice ale căii, precum și sistemele de referință este prezentată în figura 2. Sunt dați și versorii sistemelor de referință:

- pentru sistemul $O_o x_o y_o z_o$ versorii $\bar{i}_o, \bar{j}_o, \bar{k}_o$;
- pentru sistemul $Oxyz$ versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$;
- pentru sistemul $Gper$ versorii $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$
- pentru sistemul $G^* p^* e^* r^*$ versorii $\bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{k}_2$.

O dată adoptate sistemele de referință, se poate trece la stabilirea relațiilor dintre versorii acestora. Aceste relații se obțin ținând seama de rotațiile relative dintre sistemele de referință. Astfel, plecând de la versorii $\bar{i}_o, \bar{j}_o, \bar{k}_o$ se ajunge la versorii $\bar{i}_o^*, \bar{j}_o^*, \bar{k}_o^*$ printr-o rotație în jurul lui \bar{k}_o cu unghiul ψ iar apoi la $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ printr-o rotație de unghi ϕ în jurul lui \bar{i}_o^* (fig. 3).

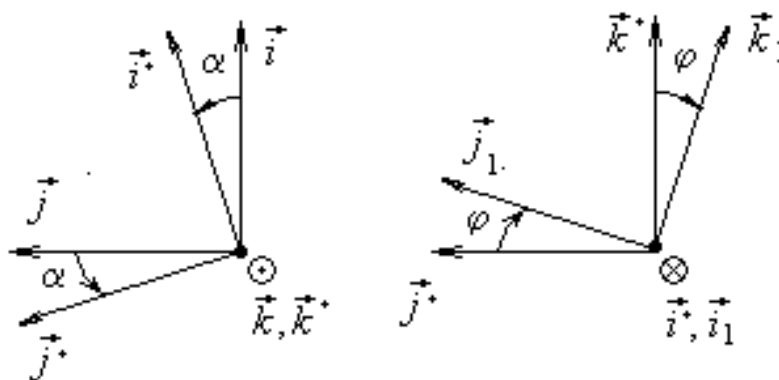


Fig. 3. Explicativă privind legătura dintre versorii sistemelor de referință $O_o x_o y_o z_o$ și $Oxyz$.

Considerând unghiul ϕ ca fiind un unchi mic ($\cos \phi \approx 1, \sin \phi = \phi$), se stabilește relația

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_o \\ \bar{j}_o \\ \bar{k}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & -\phi \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi & -\phi \cos \psi \\ 0 & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Viteza unghiulară a triedrului $Oxyz$ față de triedrul fix este dată de rotația în jurul axei verticale $O_o z_o$

$$\bar{\omega} = -\dot{\psi} \bar{k}_o = -\frac{V}{R - h_o \sin \phi} \bar{k}_o \cong -\frac{V}{R} \bar{k}_o. \quad (3)$$

Aproximarea din relația de mai sus este justificată de faptul că $R \gg h_o \sin \phi$.

Viteza unghiulară poate fi exprimată prin proiecțiile ei pe axele triedrului $Oxyz$ cu ajutorul relației (2) din care reiese

$$\bar{k}_o = \phi \bar{j} + \bar{k}. \quad (4)$$

Deci avem

$$\bar{\omega} = -\frac{V}{R} \bar{k}_o = -\frac{V}{R} \phi \bar{j} - \frac{V}{R} \bar{k}. \quad (5)$$

Întrucât osia rulează cu viteză constantă pe o curbă circulară cu supraînălțare constantă, rezultă că accelerația unghiulară este nulă

$$\bar{\varepsilon} = 0. \quad (6)$$

Se stabilește acum legătura dintre versorii triedrului $Oxzy$ și cei ai triedrului $Gper$. Pentru aceasta, se parcurg doi pași (fig. 4). Mai întâi, de la versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ se efectuează o rotație de unghi α în jurul lui \bar{k} și se obțin versorii $\bar{i}^*, \bar{j}^*, \bar{k}^*$. De aici se ajunge la versorii $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ în urma unei noi rotații în jurul lui \bar{j}^* cu unghiul ϕ .

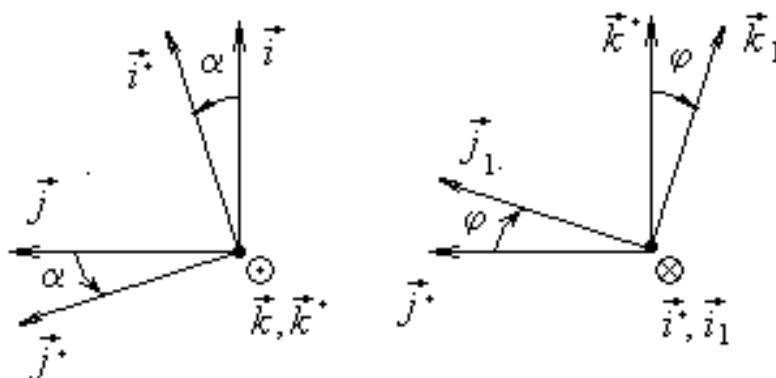


Fig. 4. Explicativă privind legătura dintre versorii sistemelor de referință $Oxzy$ și $Gper$.

Se consideră că ambele unghiuri sunt unghiuri mici și se obține relația dintre versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ și versorii $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$

$$\begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 1 & -\phi \\ 0 & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

cu precizarea că s-au neglijat termenii de ordinul doi.

Viteza unghiulară a reperului $Gper$ în raport cu reperul $Oxyz$ este rezultatul compunerii celor două rotații, în jurul lui \bar{k} cu viteza unghiulară $\dot{\alpha}$ și în jurul lui \bar{i}_1 cu viteza unghiulară $\dot{\phi}$

$$\bar{\omega}_1 = \dot{\alpha} \bar{k} + \dot{\phi} \bar{i}_1. \quad (8)$$

Legătura dintre versorii sistemului de referință $Gper$ și cei ai sistemului de referință solidar cu osia $G^*p^*e^*r^*$ este dată de rotația cu unghiul θ^* în jurul axei Ge ($Ge \equiv G^*e^*$).

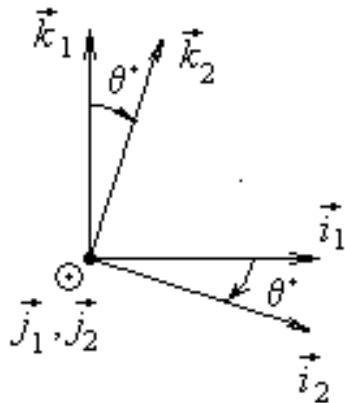


Fig. 5. Rotația sistemului $G^*p^*e^*r^*$ în raport cu $Gper$.

Se stabilesc următoarele relații (v. fig. 5)

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^* & 0 & \sin \theta^* \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta^* & 0 & \cos \theta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_2 \\ \bar{j}_2 \\ \bar{k}_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Viteza unghiulară a reperului $G^*p^*e^*r^*$ față de reperul $Gper$ este

$$\bar{\omega}_2 = \dot{\theta}^* \bar{j}_1 = \left(\frac{V}{r_o} + \dot{\theta} \right) \bar{j}_1. \quad (10)$$

unde $\dot{\theta}$, se reamintește, este alunecarea unghiulară.

3. VITEZA ȘI ACCELERAȚIA CENTRULUI DE MASĂ AL OSIEI

Ne propunem să calculăm viteza centrului de masă al osiei deci a punctului G și apoi accelerația acestuia. Pentru aceasta, trebuie ca mai întâi să se cunoască viteza punctului O . Acest punct are vectorul de poziție dat de relația (v. fig. 6)

$$\bar{r}_o = (R - h_o \sin \phi) \sin \psi \bar{i}_o + (R - h_o \sin \phi) \cos \psi \bar{j}_o + (R \operatorname{tg} \phi + h_o \cos \phi) \bar{k}_o, \quad (11)$$

din care rezultă prin derivare viteza lui O

$$\bar{v}_o = \dot{\psi} (R - h_o \sin \phi) \cos \psi \bar{i}_o - \dot{\psi} (R - h_o \sin \phi) \sin \psi \bar{j}_o. \quad (12)$$

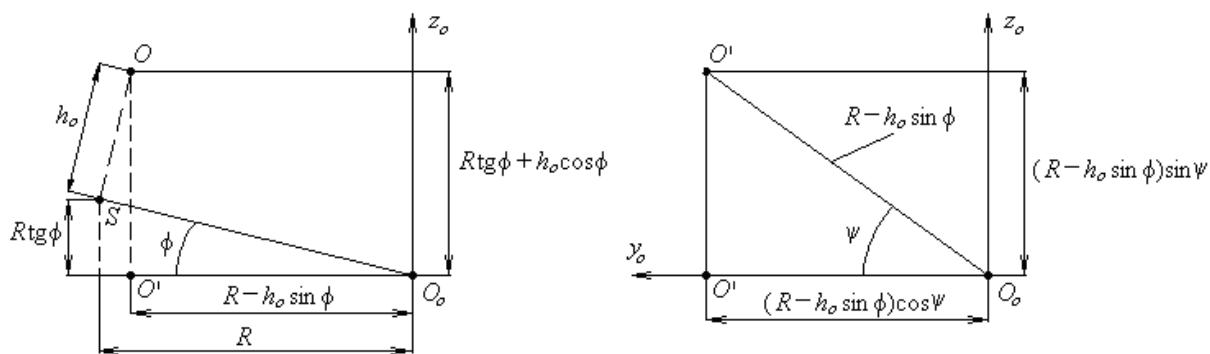


Fig. 6. Proiecțiile punctului O pe axele sistemului de referință fix $O_o x_o y_o z_o$.

Folosind relația (2) din care rezultă

$$\bar{i}_o = \cos \psi \bar{i} + \sin \psi \bar{j} - \phi \sin \psi \bar{k} ; \bar{j}_o = -\sin \psi \bar{i} + \cos \psi \bar{j} - \phi \cos \psi \bar{k} \quad (13)$$

se poate scrie viteza lui O în raport de versorii sistemului de referință mobil $Oxyz$

$$\bar{v}_o = \psi'(R - h_o \sin \phi) \bar{i} \equiv V \bar{i} . \quad (14)$$

Ținând seama că vectorul de poziție al lui G față de referențialul mobil $Oxyz$ este

$$\bar{r}_{OG} = y \bar{j} + z \bar{k} , \quad (15)$$

se obține viteza de transport

$$\bar{v}_t = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{r}_{OG} = \left[V + \frac{V}{R} (y - \phi z) \right] \bar{i} . \quad (16)$$

Întrucât avem $R \gg y \gg \phi z$, viteza de transport poate fi aproximată prin

$$\bar{v}_t = V \bar{i} . \quad (17)$$

Viteza relativă este

$$\bar{v}_r = \dot{y} \bar{j} + \dot{z} \bar{k} . \quad (18)$$

În fine, avem viteza absolută a centrului de masă al osiei

$$\bar{v}_G = \bar{v}_r + \bar{v}_t = V \bar{i} + \dot{y} \bar{j} + \dot{z} \bar{k} . \quad (19)$$

Accelerația centrului de masă al osiei se calculează cu relația

$$\bar{a}_G = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c , \quad (20)$$

în care \bar{a}_r este accelerația relativă, \bar{a}_t , accelerația de transport, iar \bar{a}_c este accelerația Coriolis. Accelerația relativă este obținută din relația (18)

$$\bar{a}_r = \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}. \quad (21)$$

Accelerația de transport a centrului de masă al osiei se calculează cu relația

$$\bar{a}_t = \bar{a}_o + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{OG} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{OG}), \quad (22)$$

în care \bar{a}_o este accelerația lui O față de sistemul de referință fix. Aceasta se obține prin derivarea relației vitezei lui O (rel. 14), ținând seamă că viteza V este constantă

$$\bar{a}_o = \dot{\bar{v}}_o = \dot{V}\bar{i} + V\dot{\bar{i}} = V\dot{\bar{i}}. \quad (23)$$

Folosind relațiile lui Poisson, avem pentru derivata lui \bar{i}

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i} = -\frac{V}{R} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & \phi & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{V}{R} \bar{j} + \frac{V}{R} \phi \bar{k}. \quad (24)$$

Din cele două relații de mai sus, rezultă accelerația lui O

$$\bar{a}_o = -\frac{V^2}{R} \bar{j} + \frac{V^2}{R} \phi \bar{k}. \quad (25)$$

Ținând seama de relațiile (6) și (25), precum și de faptul că

$$\bar{\omega} \times \bar{r}_{OG} = -\frac{V}{R} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & \phi & 1 \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = \frac{V}{R} (y - \phi z) \bar{i}, \quad (26)$$

iar produsul vectorial $\bar{\omega} \times \bar{i}$ este dat de relația (24), se poate calcula accelerația de transport cu relația

$$\bar{a}_t = -\frac{V^2}{R} \left(1 + \frac{y - \phi z}{R}\right) \bar{j} + \frac{V^2}{R} \phi \left(1 + \frac{y - \phi z}{R}\right) \bar{k}. \quad (27)$$

Luând în considerare că $(y - \phi z)/R \ll 1$, accelerația de transport se reduce la

$$\bar{a}_t = -\frac{V^2}{R} \bar{j} + \frac{V^2}{R} \phi \bar{k}. \quad (28)$$

Primul termen reprezintă componenta paralelă cu planul căii a accelerației centripete, iar al doilea reprezintă componenta perpendiculară pe cale a acesteia.

Accelerația Coriolis se calculează în funcție de viteze unghiulară (rel. 5) și de viteza relativă (rel. 18)

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2 \frac{V}{R} (\dot{y} - \phi \dot{z}) \bar{i}. \quad (29)$$

Întrucât $y \gg \phi z$, rezultă că accelerația Coriolis acționează în sensul de mers dacă osia se depărtează de axa căii spre exterior și în sens invers când osia se mișcă spre interiorul curbei. Într-adevăr, dacă osia are tendința de a se deplasa spre exteriorul curbei în condițiile în care viteza unghiulară de rotație în jurul centrului curbei rămâne constantă, rezultă că viteza centrului de masă are tendința să crească datorită îndepărtării de centrul curbei. În consecință, osia va avea o accelerație tangențială în direcția de mers. La deplasarea osiei spre interiorul curbei, distanța până la centru scade și o dată cu ea, scade și viteza tangențială, ceea ce va induce o decelerație tangențială.

Înlocuind cele trei accelerații în relația (20), se obține accelerația absolută a centrului de masă al osiei sub forma

$$\bar{a}_G = \frac{V}{R} \dot{y} \bar{i} + \left(\ddot{y} - \frac{V^2}{R} \right) \bar{j} + \left(\ddot{z} + \frac{V^2}{R} \phi \right) \bar{k}. \quad (30)$$

Accelerațiile centrului de masă al osiei se utilizează pentru calculul forțelor de inerție care intră în ecuațiile de mișcare.

4. VITEZELE DE ALUNECARE

Având în vedere ipoteza potrivit căreia șinele sunt rigid fixate de cale iar aceasta este lipsită de elasticitate, vitezele de alunecare dintre roți și șine vor fi reprezentate de vitezele absolute ale osiei în punctele de contact dintre roți și șine. După cum s-a menționat deja, în raport cu axele triedrului de referință *Gper*, punctele de contact au coordonatele $\pm p_{1,2}$, $\pm e_{1,2}$, $-r_{1,2}$, unde indicele '1' corespunde firului exterior, iar indicele '2', firului interior.

Trebuie făcută precizarea că luarea în considerare numai a două puncte de contact dintre roți și șine, adică situația de monocontact, nu limitează rezultatele analizei cinematice a vitezelor de alunecare întrucât punctul de contact de pe buza roții are în principiu aceleași coordonate ca și cel de pe roata exterioară cu deosebirea că valorile acestora sunt altele.

Vitezele de alunecare trebuie calculate în funcție de versorii reperului *Gper* având în vedere că direcțiile lor sunt în funcție de poziția osiei.

Vitezele punctelor de contact de pe roți se calculează cu relația

$$\bar{v}_a = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{v}_1 + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1 + \bar{v}_2 + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2. \quad (31)$$

în care \bar{v}_O viteza lui *O* față de sistemul de referință fix (rel. 14), \bar{v}_1 viteza lui *G* față de *Oxyz*, (rel. 18 - viteza relativă \bar{v}_r), $\bar{v}_2 = 0$ viteza lui *G** în raport cu referențialul *Gper*, $\bar{\omega}$ este viteza unghiulară a sistemului de referință *Oxyz* față referențialul fix (rel. 5), $\bar{\omega}_1$ este viteza unghiulară a sistemului de referință *Gper* față de referențialul *Oxyz* (rel. 8), $\bar{\omega}_2$ este viteza unghiulară a sistemului de referință $G^*p^*e^*r^*$ față de referențialul *Gper* (rel. 10), \bar{r} este vectorul de poziție al unui punct de pe roată în contact cu șina în raport cu *Oxyz*, \bar{r}_1 este

vectorul de poziție al unui punct de contact în raport cu $Gper$, iar \bar{r}_2 este vectorul de poziție al unui punct de contact în raport cu $G^* p^* e^* r^*$.

Considerând cele două puncte de contact, avem pentru \bar{r} următoarea relație

$$\bar{r} = y\bar{j} + z\bar{k} + (\pm p_{1,2})\bar{i}_1 + (\pm e_{1,2})\bar{j}_1 - r_{1,2}\bar{k}_1. \quad (32)$$

Având în vedere relația (7) și făcând abstracție de termenii ne semnificativi, se poate scrie

$$\bar{r} = \pm p_{1,2}\bar{i}_1 \pm e_{1,2}\bar{j}_1 - r_{1,2}\bar{k}_1. \quad (33)$$

Totodată, avem

$$\bar{r}_{1,2} = \overline{G^* A}_{1,2} = \overline{GA}_{1,2} = (\pm p_{1,2})\bar{i}_1 + (\pm e_{1,2})\bar{j}_1 - r_{1,2}\bar{k}_1. \quad (34)$$

Coroborând rezultatele obținute mai sus, se deduce că viteza roților în punctele de contact se poate calcula cu relația

$$\bar{v}_a = \bar{v}_o + \bar{v}_1 + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \bar{r} = \bar{v}_o + \bar{v}_1 + \bar{\omega}_o \times \bar{r}_1, \quad (35)$$

unde

$$\bar{\omega}_o = \bar{\omega} + \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \quad (36)$$

este viteza unghiulară a osiei.

Efectuând calculele și reținând numai termenii importanți, se obțin vitezele de alunecare dintre roți și șine

$$w_{1,2} = \left[V + V \frac{r_o}{R} (\phi + \varphi) - V \frac{r_{1,2}}{r_o} - r_o \dot{\theta} \pm e_o \left(\frac{V}{R} - \dot{\alpha} \right) \right] \bar{i}_1 + \quad (37)$$

$$+ (\dot{y} + \dot{\varphi} r_o - \alpha V) \bar{j}_1 + \left(\dot{z} \pm \dot{\varphi} e_o \mp p_{1,2} \frac{V}{r_o} \right) \bar{k}$$

Pentru a calcula mai departe componentele vitezelor de alunecare se ține seama de rezultatele studiului contactului dintre roți și șine, respectiv se introduc expresiile razelor efective de rulare și decalajele longitudinale ale punctelor de contact față de planul vertical al osiei

$$r_{1,2} = r_o \pm \Delta r_{1,2}, \quad p_{1,2} = (\alpha - \alpha_c) r_o \operatorname{tg} \gamma_{1,2}, \quad (38)$$

în care $\Delta r_{1,2}$ sunt diferențele razelor cercurilor efective de rulare în raport cu raza cercurilor de rulare ale osiei în poziție mediană în cale, iar α_c este unghiul dintre axa deformată a căii și axa ideală a căii (fără abatere laterală).

Avem componentele vitezei de alunecare de-a lungul axelor triedrului $Gper$

$$w_{1,2x} = V \left[\frac{r_o}{R} (\phi + \varphi) \mp \frac{\Delta r_{1,2}}{r_o} \right] \pm e_o \left(\frac{V}{R} - \dot{\alpha} \right) - r_o \dot{\theta}, \quad (39)$$

$$w_{1,2y} = \dot{y} + \dot{\varphi} r_o - \alpha V, \quad (40)$$

$$w_{1,2z} = \dot{z} \pm \dot{\varphi} e_o \mp (\alpha - \alpha_c) V \operatorname{tg} \gamma_{1,2}. \quad (41)$$

Pentru calculul forțelor de frecare, interesează însă componentele vitezei de alunecare din planele tangențiale de contact, numite și *plane de alunecare* pentru că viteza de alunecare este conținută în aceste plane așa cum se va vedea mai jos. Acestea sunt înclinate față de axa laterală a triedrului *Gper* cu unghiurile de contact $\gamma_{1,2}$ (fig. 7). Componentele tangențiale $w_{tx,y}$ și normale w_n ale vitezelor de alunecare sunt



Fig. 7. Vitezele de alunecare.

$$w_{1,2tx} = w_{1,2x} = V \left[\frac{r_o}{R} (\phi + \varphi) \mp \frac{\Delta r_{1,2}}{r_o} \pm \frac{e_o}{R} - r_o \dot{\theta} \right], \quad (42)$$

$$\begin{aligned} w_{1,2ty} &= w_{1,2y} \cos \gamma_{1,2} \pm w_{1,2z} \sin \gamma_{1,2} \\ &= (\dot{y} + \dot{\varphi} r_o - \alpha V) \cos \gamma_{1,2} \pm \left[\dot{z} \pm \dot{\varphi} e_o \mp (\alpha - \alpha_c) V \operatorname{tg} \gamma_{1,2} \right] \sin \gamma_{1,2} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} w_{1,2n} &= \mp w_{1,2y} \sin \gamma_{1,2} + w_{1,2z} \cos \gamma_{1,2} \\ &= \mp (\dot{y} + \dot{\varphi} r_o - \alpha V) \sin \gamma_{1,2} + \left[\dot{z} \pm \dot{\varphi} e_o \mp (\alpha - \alpha_c) V \operatorname{tg} \gamma_{1,2} \right] \cos \gamma_{1,2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Prelucrarea componentelor vitezelor din planul tangențial se poate face cu ajutorul curbei de contact. Aceasta reprezintă deplasările relative dintre profilurile de rulare impuse de condițiile de contact. Notând cu u abaterea laterală a axei căii, coordonatele unui punct de pe curba de contact sunt date de relațiile

$$y_{c1,2} = \pm (y + r_o \varphi - u) + y_{co}, \quad (45)$$

$$z_{c1,2} = z \pm e_o \varphi + z_{co}, \quad (46)$$

în care y_{co} și z_{co} corespund pozițiilor relative ale celor două profiluri de rulare (roată, respectiv șină).

Condiția de contact impune ca tangentele unghiurilor în punctele de contact să satisfacă condiția

$$\operatorname{tg} \gamma_{1,2} = \frac{dz_{c1,2}}{dy_{c1,2}} = \frac{\frac{dz_{c1,2}}{dt}}{\frac{dy_{c1,2}}{dt}} = \frac{\dot{z}_{c1,2}}{\dot{y}_{c1,2}}. \quad (47)$$

Din relațiile de mai sus rezultă

$$\pm (\dot{y} + r_o \dot{\phi} - \dot{u}) \sin \gamma_{1,2} = (\dot{z} \pm e_o \dot{\phi}) \cos \gamma_{1,2}. \quad (48)$$

Derivata în raport cu timpul a abaterii laterale a căii se poate exprima astfel

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha_c V. \quad (49)$$

Se calculează viteza tangențială transversală cu ajutorul relațiilor (43), (48) și (49)

$$w_{1,2ty} = \frac{\dot{y} + \dot{\phi} r_o - \alpha V}{\cos \gamma_{1,2}}. \quad (50)$$

Pe de altă parte, componenta normală pe planul de contact este nulă așa cum se obține din relațiile (44) și (48)

$$w_{1,2n} = 0, \quad (51)$$

ceea ce era de așteptat pentru că roata nu se desprinde de șină și nici nu ‘intră’ în ea. Aceasta înseamnă că viteza de alunecare este conținută în planul tangent de contact, adică în planul de alunecare, după cum s-a anticipat puțin mai sus.

Analizând termenii care intră în expresiile vitezelor de alunecare din planul tangent de contact se pot face următoarele observații. În ceea ce privește alunecarea longitudinală, termenul provenit din componenta paralelă cu osia a vitezei de rotație în jurul curbei este mult mai mic decât cel datorat componentei perpendiculare pe axa osiei

$$\frac{r_o}{R} (\phi + \varphi) \ll \frac{e_o}{R} \quad (52)$$

și în consecință, se poate neglija.

Pe de altă parte, trebuie observat faptul că numai vitezele de alunecare longitudinale depind de mărimea defectelor laterale ale căii de rulare prin diferențele dintre cercurile efective de rulare. Totodată, se mai menționează că pe suprafața de rulare, unghiul de contact este mic și deci cosinusul lui, care apare la numitorul expresiei vitezei de alunecare laterale, poate fi aproximat cu unitatea.

Cu aceste precizări se pot lua în calcul următoarele relații ale vitezelor de alunecare

$$w_{1,2x} = V \left(\mp \frac{\Delta r_{1,2}}{r_o} \pm \frac{e_o}{R} \right) \mp e_o \dot{\alpha} - r_o \dot{\theta}, \quad (53)$$

$$w_{1,2ry} = \dot{y} + \dot{\phi} r_o - \alpha V. \quad (54)$$

La circulația în aliniament, numai vitezele de alunecare longitudinală se modifică

$$w_{1,2x} = \mp V \frac{\Delta r_{1,2}}{r_o} \mp e_o \dot{\alpha} - r_o \dot{\theta}. \quad (55)$$

Deosebim două regimuri, regimul staționar, în care osia ocupă poziția de echilibru la traversarea curbei circulare și regimul dinamic când osia oscilează în jurul poziției de echilibru datorită mișcării orizontale întreținută de abaterile laterale ale căii în condițiile conicității inversate a suprafețelor de rulare ale roților. Poziția de echilibru este determinată de forțele care acționează asupra osiei și ca urmare o discuție asupra vitezelor de alunecare poate fi făcută numai în legătură cu acestea. Totuși, pot fi făcute o serie de observații de principiu asupra regimului staționar pentru cazul mai simplu în care profilul de rulare al roților este conic sau de uzură iar osia rulează pe suprafețele de rulare, fără contact pe buză. În aceste condiții se poate lua pentru variația razelor de rulare $\Delta r_1 = \Delta r_2 = y\gamma_e$, unde γ_e este conicitatea echivalentă.

Dacă osia nu are o alunecare unghiulară și această situație este caracteristică cazului osiei libere, adică fără moment motor sau de frânare și fără transfer de sarcină, atunci vitezele de alunecare în regim staționar sunt date de relațiile

$$w_{1,2x} = \pm V \left(\frac{e_o}{R} - \frac{y\gamma_e}{r_o} \right), \quad (56)$$

$$w_{1,2ry} = -\alpha V. \quad (57)$$

Relațiile de mai sus pun în evidență faptul că vitezele de alunecare sunt rezultatul suprapunerii a două mișcări de rotație, una în jurul centrului curbei cu viteza unghiulară $\omega_z = V/R$ și o alta de revoluție a osiei în jurul axei sale cu viteza unghiulară $\omega_y = V/r_o$. Suportul vectorului vitezei unghiulare în jurul axei osiei nu trece prin axa curbei, ci este decalat cu distanța αR . Așadar, rularea osiei la traversarea curbei este o rostogolire cu alunecări atât longitudinale, cât și transversale.

Din punct de vedere practic este interesant să se cunoască condițiile în care rularea nu prezintă alunecări, adică rularea este o *rostogolire pură*. Într-o astfel de eventualitate, nemaivând alunecări între roți și șine, forțele de frecare se anulează iar uzura suprafețelor de rulare încetează, cel puțin teoretic.

Relația (57) arată că vitezele de alunecare transversală pe cele două roți sunt egale. Ele se anulează în eventualitatea că osia ocupă o *poziție radială* în cale ($\alpha = 0$). Dacă în discuție intră prima osie a vehiculului, trebuie observat faptul că din cauza legării relativ rigide de boghiu sau de cutia vehiculului, după cum este cazul de un vehicul pe boghiuri sau pe osii, prima osie are tendința de a face un anumit unghi de atac pozitiv ($\alpha > 0$). Se spune că osia ocupă o *poziție supraradială* – se află în fața razei care asigură anularea vitezei de alunecare

transversală. Dacă osia face un unghi de atac negativ ($\alpha < 0$), atunci osia rulează în spatele poziției radiale - se spune că osia e în *poziție subradială*. O astfel de situație se poate întâlni la osia a doua a boghiului sau vehiculului. Trebuie observat faptul că în cazul poziției supraradiale, alunecarea se face spre interiorul curbei, iar forța de frecare corespunzătoare va împinge osia spre exteriorul curbei. Acest lucru conduce la uzura accentuată a buzei roții atacante și la creșterea riscului de deraiere. Dacă osia rulează subradial alunecarea transversală se face spre exteriorul curbei, iar forța de frecare trage osia spre firul interior. În acest fel, osia se opune consumării jocului în cale și rulării cu roata de pe firul exterior în contact cu flancul interior al șinei. Se reduce uzura buzei profilului și scade pericolul de deraiere.

În privința vitezelor longitudinale de alunecare, se observă faptul că ele formează un cuplu, respectiv sunt egale pe cele două roți și de sensuri contrare. Se pune întrebarea care sunt condițiile pentru care componenta longitudinală a vitezei de alunecare se anulează. O astfel de situație este caracteristică așa-numitei *rulări conice*. Pentru un anumit decalaj transversal al osiei în cale, rezultă raza curbei la care are loc rularea conică

$$R_{rc} = \frac{e_o r_o}{y \gamma_e} . \quad (58)$$

Dacă interesează situația când osia consumă jocul în cale $y = \sigma/2$, (σ este jocul osiei în cale, respectiv diferența dintre ecartamentul căii și cel al osiei), așa cum se întâmplă la prima osie, atunci expresia razei de rulare conică devine

$$R_{rc} = \frac{2e_o r_o}{\sigma \gamma_e} . \quad (59)$$

Dacă raza curbei este diferită de raza de rulare conică, atunci vitezele de alunecare longitudinale vor avea expresia

$$w_{1,2x} = \pm V \left(\frac{e_o}{R} - \frac{e_o}{R_{rc}} + \frac{e_o}{R_{rc}} - \frac{\sigma \gamma_e}{2r_o} \right) = \pm V \frac{e_o (R_{rc} - R)}{R R_{rc}} . \quad (60)$$

Dacă raza curbei este mai mare decât raza de rulare conică ($R > R_{rc}$), atunci roata de pe firul exterior alunecă înapoi, iar cea de pe firul interior alunecă înainte. Dacă discuția privește prima osie, care în mod ‘natural’ are o dispunere subradială, la traversarea curbilor cu raze mai mari decât raza de rulare conică, forțele de frecare longitudinală au tendința de a roti roata în sensul micșorării unghiului de atac și deci de apropiere a osiei de poziția radială cu toate efectele pozitive pe care acest lucru le presupune. În cazul în care osia traversează o curbă cu raza mai mică decât raza de rulare conică, roata de pe firul exterior alunecă înapoi, iar cea de pe firul interior alunecă înainte. Dacă din nou ne referim la prima osie, cuplul forțelor de frecare tinde să accentueze poziția subradială a osiei prin mărirea unghiului de atac înrăutățind performanțele dinamice ale vehiculului.

Revenind la relația (59), se observă că raza de rulare conică scade în condițiile în care conicitatea echivalentă este mai mare. În general, profilul de uzură are o conicitate echivalentă mai mare decât profilul conic și ca urmare, raza de rulare conică a profilurilor de uzură este

mai mică. Acest aspect coroborat cu considerațiile de mai sus explică de ce profilurile de uzură asigură performanțe superioare celor conice la circulația în curbă.

Dacă în relația vitezelor de alunecare longitudinală se introduce termenul alunecării unghiulare, se obține relația specifică regimului de tracțiune ori de frânare a osiei. De asemenea, acest termen apare în cazul transferului de sarcină. În literatura de specialitate [6], analiza acestor regimuri se face cu ajutorul așa-numitului *coeficient de regim*. Acesta este definit ca fiind raportul dintre viteza unghiulară a osiei și viteza unghiulară corespunzătoare osiei libere

$$K = \frac{r_o \omega_e}{V} = 1 + \frac{r_o \dot{\theta}}{V}. \quad (61)$$

Se stabilesc următoarele corelații:

- regim osie liberă $K = 1$ sau $\dot{\theta} = 0$
- regim de frânare $0 \leq K < 1$ sau $-\frac{V}{r_o} \leq \dot{\theta} < 0$
- regim de tracțiune $1 < K < \infty$ sau $0 < \dot{\theta} < \infty$.

Valorile limită ale coeficientului de regim corespund fie blocării osiei la frânare $K = 0$, fie patinării acesteia în regim de tracțiune $K \rightarrow \infty$.

În regim de frânare sau tracțiune, vitezele longitudinale nu mai sunt egale și de semne contrare pentru că intervine alunecarea unghiulară pentru realizarea, după caz, a forței de frânare ori de tracțiune. În principiu, în timpul frânării osia alunecă înainte pentru ca forța de frecare care devine forță de frânare să acționeze în sens contrar sensului de mers al osiei. La osia în regim de tracțiune, situația se inversează, osia alunecă înapoi iar forța de tracțiune are sensul înainte.

Dacă se are în vedere faptul că datorită decalajului transversal al osiei față de poziția mediană, conicitatea efectivă nu este constantă ci este dependentă de poziția punctelor de contact, vitezele de alunecare longitudinale se calculează cu relațiile

$$w_{1,2x} = \pm V \left(\frac{e_o}{R} - \frac{\Delta r_{1,2}}{r_o} \right), \quad (62)$$

în care $\Delta r_1 = r_1 - r_o$ și $\Delta r_2 = r_o - r_2$.

În această situație vitezele de alunecare nu mai sunt egale și de semne contrare în orice situație, motiv pentru care osia nu mai poate fi în regim de osie liberă fără transfer de sarcină decât dacă apare și o alunecare unghiulară care să egalizeze vitezele de alunecare longitudinală pe roți. Deci vom avea

$$w_{1,2x} = \pm V \left(\frac{e_o}{R} - \frac{\Delta r_{1,2}}{r_o} \right) + r_o \dot{\theta}. \quad (63)$$

Punând condiția ca viteza de pe roata exterioră să fie egală și de semn contrar celei de pe roata interioară, rezultă

$$V\left(\frac{e_o}{R} - \frac{\Delta r_1}{r_o}\right) + r_o \dot{\theta} = V\left(\frac{e_o}{R} - \frac{\Delta r_2}{r_o}\right) - r_o \dot{\theta} \quad (64)$$

din care se obține

$$r_o \dot{\theta} = V \frac{\Delta r_2 - \Delta r_1}{r_o}. \quad (65)$$

În aceste condiții, vitezele de alunecare longitudinală sunt

$$w_{1,2x} = \pm V \left(\frac{e_o}{R} - \frac{\Delta r_1 + \Delta r_2}{2r_o} \right). \quad (66)$$

Raza de rulare conică se calculează cu relația

$$R_{rc} = 2 \frac{e_o r_o}{\Delta r_1 + \Delta r_2} \quad (67)$$

sau

$$R_{rc} = 2 \frac{e_o r_o}{r_1 - r_2} \quad (68)$$

obținută după înlocuirea lui $\Delta r_{1,2}$.

În finalul acestei secțiuni, sunt prezentate componentele vectorului vitezei unghiulare a osiei normale pe planele de contact ale roților. Aceste componente sunt importante pentru evaluarea efectului de pivotare asupra forței laterale de frecare. Avem următoarele componente normale ale vitezei unghiulare

$$\omega_{1,2n} = \left(\dot{\alpha} - \frac{V}{R} \right) \cos \gamma_{1,2} \mp \left[\frac{V}{r_o} + \dot{\theta} - \frac{V}{R} (\phi + \varphi) \right] \sin \gamma_{1,2}. \quad (69)$$

În calcule se poate lua o formă simplificată

$$\omega_{1,2n} = \left(\dot{\alpha} - \frac{V}{R} \right) \cos \gamma_{1,2} \mp \left(\frac{V}{r_o} + \dot{\theta} \right) \sin \gamma_{1,2}. \quad (70)$$

Dacă osia circulă în aliniament, atunci vitezele de pivotare sunt

$$\omega_{1,2n} = \dot{\alpha} \cos \gamma_{1,2} \mp \left(\frac{V}{r_o} + \dot{\theta} \right) \sin \gamma_{1,2}. \quad (71)$$

Se vede că la circulația în curbă apare un efect de pivotare datorat mișcării de rotație a osiei în jurul centrului curbei. Analiza relațiilor vitezelor de pivotare arată influența unghiului de contact și faptul că această influență crește atunci când punctul de contact se apropie de buza profilului.

Totodată, se poate constata că în regim de frânare, efectul de pivotare scade ($\dot{\theta} < 0$) însă devine mai important la osiile motoare $\dot{\theta} > 0$. Prin aceasta contribuie la uzura mai

accentuată a profilurilor roților care echipează osiile motoare în raport cu cele ale osiilor nemotoare. Acestea din urmă rulează fie în regim de osie liberă, fie în regim de osie frânată.

5. CONCLUZII

La circulația în curbă, osia are o mișcare complexă a cărei cinematică influențează întreaga dinamică a vehiculului.

În lucrare sunt prezentate într-o formă originală principalele aspecte legate de cinematica osiei. Astfel, sunt calculate viteza și accelerația centrului de masă al osiei cu punerea în evidență a influenței accelerației Coriolis care însă, în acest caz, joacă un rol marginal.

O atenție deosebită este acordată vitezelor de alunecare dintre roți și șine întrucât acestea influențează mărimea și orientarea forțelor de frecare, precum și fenomenele de uzură a suprafețelor de rulare. Sunt precizate condițiile rulării cu rostogolire pură. De asemenea, este calculată raza curbei care asigură rularea conică atât pentru profilurile de rulare cu caracteristică liniară (conicitate echivalentă constantă), cât și pentru cele cu caracteristică neliniară la care conicitatea echivalentă depinde de deplasarea transversală a osiei în cale. Sunt calculate vitezele de pivotare în punctele de contact dintre roți și șine și se demonstrează pe această bază faptul că regimul de tracțiune contribuie într-o măsură mai mare la uzura suprafețelor de rulare.

BIBLIOGRAFIE

- [1] **F. J. Redtenbacher** - „*Die Gesetze des Locomotiv-Baues*. Verlag von Friedrich Bassermann”, Mannheim, 1855.
- [2] **C. Bodecker** - „*Die Wirkungen zwischen Rad und Schiene und ihre Einflüsse auf den Lauf und den Bewegungswiderstand der Fahrzeuge in den Eisenbahnzügen*, Hahn’sche Buchhandlung”, Hannover, 1887.
- [3] **K. Klingel** - „*Über den Lauf der Eisenbahnwagen auf Gerarder Bahn*. Organ Fortsch. Eisenwes”, 38, 113-123, 1883.
- [4] **W. Bäseler** - „*Die Spurkranzreihung*. Organ”, 1927.
- [5] **E. Pawelka** - „*Aus der Théorie des Krümmungslaufes*”, Verkehrstechnik, 11, 1936.
- [6] **I. Sebeșan** - “*Dinamica vehiculelor de cale ferată*”, Ed. MatrixRom, București, 2011.
- [7] **A. H. Wickens** - „*Fundamentals of railway vehicle dynamics guidance and stability*”, Swets & Zeitlinger B. V. Lisse, The Netherlands, 2003.
- [8] **S. A. Simson, C. Cole** - “*Simulation of traction and curving for passive steering hauling locomotives*”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering, Part F – Journal of Rail and Rapid Transit 222, 117-127, 2008.
- [9] **X.Y.Long, Q.C. Wei, F.Y. Zheng** - “*Dynamic analysis of railway transition curves*”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering, Part F - Journal of Rail and Rapid Transit 224, 2010.
- [10] **S.Y. Lee, Y.C. Cheng** - „*Hunting stability analysis of high-speed railway vehicle trucks on tangent tracks*”, Journal of Sound and Vibration 282, 881-898, 2005.
- [11] **H. True, R. Asmund** - „*The dynamics of a railway freight wagon wheelset with dry friction damping*”, Vehicle System Dynamics vol 38, No 2 , 149-163.

- [12] **H. Molatefi, M. Hecht, M.H. Kadivar** - „*Critical speed and limit cycles in the empty Y25-freight wagon*”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering, Part F – Journal of Rail and Rapid Transit 220, 347- 359, 2006.
- [13] **O. Polach** - „*On non-linear methods of bogie stability assessment using computer simulations*”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering, Part F – Journal of Rail and Rapid Transit 220, 13 - 27, 2006.