

# CONSIDERAȚII PRIVIND INSTABILITATEA VIBRAȚIEI UNEI CORP MOBIL PE O GRINDĂ CU FUNDAȚIE VÂSCOELASTICĂ

## ON THE VIBRATION INSTABILITY OF A MOVING MASS ALONG A BEAM ON VISCOELEASTIC FOUNDATION

Prof. univ. dr. ing. Traian MAZILU<sup>1</sup>, Asist. drd. ing. Cristina TUDORACHE<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Universitatea Politehnica București  
Splaiul Independenței 313, București 060042, Romania  
e-mail: trmazilu@yahoo.com, cristi\_tudorache2003@yahoo.com

**Rezumat.** Se tratează regimul dinamic generat de instabilitatea vibrației unui corp încărcat cu o sarcină statică care se mișcă uniform pe o grindă pe fundație vâsco-elastică, datorată undelor Doppler anormale excitate în grindă. Când vibrația devine instabilă, răspunsul sistemului este un ciclu limită caracterizat printr-o succesiune de șocuri produse de doi factori opusi: efectul undelor anormale Doppler care pompează energie forțând corpul să se desprindă de grindă și sarcina statică care readuce corpul pe grindă. Această problemă este importantă pentru cazul trenurilor moderne care se deplasează pe o cale cu sol moale.

**Cuvinte cheie:** corp mobil, grindă, instabilitate, ciclu limită, funcții Green

**Abstract.** The paper herein deals with the study of the dynamic behaviour generated by the instability of the vibration of a loaded mass, uniformly moving along an Euler-Bernoulli beam on a viscoelastic foundation, induced by the anomalous Doppler waves excited in the beam. When the vibration becomes unstable, the system evolution is a limit cycle characterized by a succession of shocks, due to the action of two opposite factors: the anomalous Doppler waves that pump energy at the interface between the moving mass and the beam, thus forcing the mass to take off, and the static load that push the mass downwards. This issue is relevant for the case of modern trains travelling along a track with soft soil.

**Keywords:** moving mass, beam, instability, limit cycle, Green's functions

### 1. INTRODUCERE

Când un vehicul feroviar se deplasează cu o viteză suficient de mare, este posibil ca reacția undelor elastice induse în cale să determine vibrații instabile ale vehiculului. Ca urmare, nivelul vibrațiilor crește așa încât este afectat confortul călătorilor, deteriorată structura căii de rulare și există pericolul ca vehiculul să deraieze. Un astfel de fenomen periculos este în legătură cu posibilitatea ca trenurile de mare viteză să se deplaseze cu o viteză mai mare decât viteza de propagare a undelor elastice generate de acestea în cale. Această posibilitate este rar întâlnită, dar există două cazuri cand totuși ea se poate produce: mai întâi, în cazul liniilor de cale ferată care traversează zone cu sol moale cum este turba, argila organică sau argila moale de origine marină [1-4], și apoi când șinele sunt supuse la eforturi mari de compresiune [5, 6] datorită dilatării împiedicate.

În general, conceptul de stabilitate-instabilitate este legat de mișcarea perturbată în vecinătatea unei stări de referință care poate fi un punct de echilibru sau o mișcare periodică. Dacă răspunsul sistemului rămâne în apropierea stării de referință, atunci se spune că aceasta este stabilă, dacă nu, atunci se spune că este instabilă.

Pentru prima oară, Denisov ș.a. [7] s-au ocupat cu cazul vibrației instabile generată de o masă mobilă de-a lungul unei grinzii Euler-Bernoulli pe suport continuu. Mai apoi Bogacz ș.a. [8] au studiat răspunsul instabil al unui sistem format dintr-o masă și un arc care se mișcă de-a lungul unei grinzi Timoshenko pe fundație elastică. Aceste lucrări au condus la ideea că vibrațiile transversale ale unui subsistem inerțial care se deplasează pe o structură elastică devine instabil dacă viteza sistemului este mai mare decât o valoare anume, viteza critică, însă nu s-a avansat nici o explicație a acestui fenomen.

Primul care a explicat instabilitatea a fost Metrikine [9], care a făcut legătura dintre acest fenomen și undele Doppler anormale, radiate de obiectul mobil când viteza depășește cea mai mică viteză de fază a undelor radiate [10].

Problema răspunsului instabil al unui sub-sistem mobil pe o structură elastică a fost studiat în mai multe lucrări [4, 6, 11-14] pentru diferite feluri de subsisteme mobile și structuri elastice folosite pentru a modela sistemul tehnic vehicul-calea de rulare. Toate aceste studii se ocupă cu calculul vitezei critice când vibrația vehiculului devine instabilă. Principalul scop este de a găsi regiunile de instabilitate în spațiul parametrilor sistemului considerat.

În cele ce urmează, atenția este centrată pe efectul dinamic dintre o masă și o grindă Euler-Bernoulli pe fundație vâscoelastică datorat vibrației instabile cu scopul de a răspunde la întrebarea, „Ce se întâmplă când mișcarea devine instabilă?”. Sistemul mecanic studiat poate fi considerat ca unul dintre cele mai simple care este potrivit să descrie interacțiunea dintre roată și cale. Din acest motiv, este simulat efectul forței statice precum și neliniaritatea contactului roată-șină conform cu teoria lui Hertz. În aceste circumstanțe, răspunsul la întrebarea de mai sus prezintă interes practic pentru că având cunoștințe efective asupra răspunsului unui vehicul instabil, există posibilitatea de a evalua riscul potențial și de a alege cele mai bune soluții tehnice pentru a evita acest risc. Această problemă nu a mai fost studiată în trecut.

Mai întâi, este important de a găsi viteza critică a sistemului, adică limita dintre vibrația stabilă și cea instabilă. Pentru aceasta, ecuațiile de mișcare sunt rescrise într-o aproximare liniară, considerând că are loc contactul permanent dintre masa mobilă și grindă și apoi, aplicând transformarea Laplace și utilizând metoda funcției Green, este obținută ecuația caracteristică. Această tehnică de a obține ecuația caracteristică este diferită de calea clasică descrisă mai sus și nu presupune aplicarea transformării Fourier (directă și inversă). Apoi, viteza critică este calculată cu metoda descompunerii D. Când mișcarea roții devine instabilă, roata pierde contactul cu șina, însă forța statică o împinge în jos iar contactul cu șina este restabilit. Astfel, vibrația roată-șină are un ciclu limită. Pentru a simula aceste efecte, ecuațiile neliniare de mișcare sunt integrate prin aplicarea metodei funcției Green [16, 17]. Această metodă are mai multe avantaje pentru că ea permite simularea propagării atât a undelor Doppler normale cât și anormale. De asemenea, permite simularea neliniarității contactului roată-șină. Simularea numerică cu această metodă are ca scop să se verifice acuratețea în estimarea vitezei critice obținută prin metoda descompunerii D aplicată ecuației caracteristice. În al doilea rând, este analizat regimul dinamic în domeniul vitezelor supercritice și este reliefată influența vitezei și a contactului hertzian neliniar.

## 2. MODELUL MECANIC

Se consideră cazul unei mase  $M$  care se mișcă uniform cu viteza  $V$  de-a lungul unei structuri elastice unidimensionale de lungime infinită, reprezentată de o grindă Euler-Bernoulli pe fundație vâscoelastică (v. figura 1).

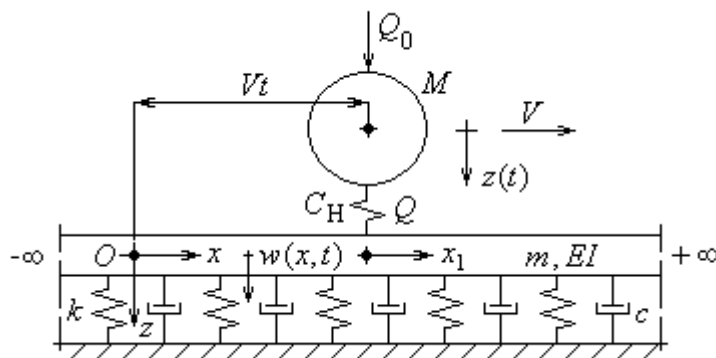


Fig. 1.

Grinda ia în considerare rigiditatea de încovoiere a șinei și masa căii incluzând masa șinei, a traverselor (numai jumătate) și jumătate din cea a balastului, în timp ce fundația vâscoelastică reprezintă elasticitatea terasamentului. Masa mobilă modelează roata și conform teoriei neliniare a lui Hertz se introduce elasticitatea contactului. De asemenea, este simulată sarcina statică și posibilitatea de desprindere a roții de șină.

Ecuțiile de mișcare pot fi scrise sub forma

$$M\ddot{z}(t) = Q_0 - Q(t) \quad (1)$$

$$D_{x,t}w(x,t) = Q(t)\delta(x-Vt) \quad (2)$$

$$\left(\frac{Q(t)}{C_H}\right)^{2/3} = [z(t) - w(Vt,t)]H[z(t) - w(Vt,t)] \quad (3)$$

unde  $D_{x,t}$  este operatorul diferențial al grinzii Euler-Bernoulli pe fundație vâscoelastică

$$D_{x,t} = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c \frac{\partial}{\partial t} + k \quad (4)$$

iar  $z(t)$  este deplasarea verticală a masei,  $w(x,t)$  este deplasarea grinzii,  $x$  este coordonata de-a lungul grinzii,  $t$  - timpul,  $m$  și  $EI$  sunt masa pe unitatea de lungime și rigiditatea la încovoiere a grinzii,  $c$  și  $k$  sunt vâscoelasticitatea și rigiditatea pe unitatea de lungime a fundației,  $Q(t)$  și  $Q_0$  sunt forța de contact și sarcina statică,  $C_H$  reprezintă constanta lui Hertz și în fine,  $\delta(\cdot)$  și  $H(\cdot)$  sunt funcția impuls a lui Dirac și funcția treaptă unitară a lui Heaviside.

Condițiile la limită sunt

$$\lim_{|x-Vt| \rightarrow \infty} w(x,t) = 0 \quad (5)$$

Dacă se consideră

$$x_1 = x - Vt . \quad (6)$$

După câteva calcule, se obține din ecuațiile (2) și (3)

$$D_{x_1,t} w(x_1,t) = Q(t)\delta(x_1) \quad (7)$$

$$\left(\frac{Q(t)}{C_H}\right)^{2/3} = [z(t) - w(0,t)]H[z(t) - w(0,t)]... \quad (8)$$

unde operatorul diferențial se obține din ecuația (4) prin înlocuirea operatorilor de derivare după cum urmează

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \rightarrow \frac{\partial^n}{\partial x_1^n}, \quad \frac{\partial^n}{\partial t^n} \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^n. \quad (9)$$

De asemenea, condițiile la limită (5) devin

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} w(x_1,t) = 0 \quad (10)$$

Trebuie subliniat faptul că sistemul are două surse de neliniaritate, una vine de la contactul hertzian iar cealaltă se produce când masa se desprinde de grindă iar forța de contact ajunge la zero.

### 3. Problema stabilității

Pentru a studia stabilitatea sistemului, ecuațiile de mișcare trebuie să fie reduse la o aproximare liniară [18]. Se presupune deci că masa și grinda sunt în contact permanent și în plus caracteristica contactului este liniară. Deplasările sistemului au două componente, prima componentă caracterizează mișcarea permanentă și este dată de sarcina statică, iar a doua componentă este componenta dinamică care reprezintă perturbația în raport cu mișcarea permanentă.

Extrăgând componentele mișcării permanente, ecuațiile de mișcare (1, 7-8) se vor reformula după cum urmează

$$M\Delta\ddot{z}(t) = -\Delta Q(t)$$

$$D_{x_1,t}\Delta w(x_1,t) = \Delta Q(t)\delta(x_1) ... \quad (11)$$

Considerații privind instabilitatea vibrației unei mase mobile pe o grindă cu fundație vâscoelastică

$$\Delta Q(t) = k_H [\Delta z(t) - \Delta w(0, t)] \quad (12)$$

unde  $\Delta z(t)$  și  $\Delta w(x_1, t)$  sunt perturbațiile sistemului în jurul stării corespunzătoare mișcării permanente,  $k_H = (3/2) \cdot \sqrt[3]{Q_0 C_H^2}$  este rigiditatea contactului hertzian iar  $\Delta Q = Q(t) - Q_0$ .

Condițiile la limită (10) devin

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \Delta w(x_1, t) = 0 \quad (13)$$

Pentru a obține ecuația caracteristică a vibrației masei mobile, se aplică transformarea Laplace în raport cu timpul  $t$

$$\Delta \tilde{w}(x_1, s) = \int_0^\infty \Delta w(x_1, t) \exp(-ist) dt, \quad \Delta \tilde{z}(s) = \int_0^\infty \Delta z(t) \exp(-ist) dt \dots \quad (14)$$

unde  $s$  reprezintă argumentul complex al transformării Laplace și  $i_2 = -1$ .

Mai departe, se obțin următoarele ecuații

$$D_{x_1, s} \Delta \tilde{w}(x_1, s) = -\frac{k_H M s^2}{M s^2 + k_H} \Delta \tilde{w}(0, s) \delta(x_1) \quad (15)$$

unde  $D_{x_1, s}$  se obține din operatorul  $D_{x_1, s}$  prin aplicarea transformării Laplace.

Implicit, condițiile inițiale pot fi considerate nule pentru că ele nu au nici o influență asupra problemei stabilității. În acest moment, metodele cunoscute [4, 6, 11-14, 19] recomandă aplicarea transformării în raport cu  $x_1$ . În loc de aceasta, preferăm să dăm soluția în termeni dependenți de funcția Green a operatorului diferențial  $D_{x_1, s}$

$$\Delta \tilde{w}(x_1, s) = -\frac{k_H M s^2}{M s^2 + k_H} \int_{-\infty}^{\infty} G(x_1, \xi, s) \Delta \tilde{w}(0, s) \delta(\xi) d\xi$$

sau

$$\Delta \tilde{w}(x_1, s) = -\frac{k_H M s^2}{M s^2 + k_H} \Delta \tilde{w}(0, s) G(x_1, 0, s) \quad (16)$$

unde  $G(x_1, \xi, s)$  simbolizează funcția Green.

Luând  $x_1 = 0$ , ecuația (16) devine

$$\Delta \tilde{w}(0, s) = -\frac{k_H M s^2}{M s^2 + k_H} \Delta \tilde{w}(0, s) G(0, 0, s) \quad (17)$$

În general,  $\Delta \tilde{w}(0, s) \neq 0$ , și de aceea este obligatoriu să avem

$$Ms^2 + k_{\text{eqv}}(s) = 0 \dots \quad (18)$$

unde

$$k_{\text{eqv}}(s) = \frac{k_H}{k_H G(0,0,s) + 1} = \frac{1}{G(0,0,s) + 1/k_H} \dots \quad (19)$$

Dacă se ia  $s = i\Omega$ , atunci  $G(0, 0, i\Omega)$  reprezintă receptanța structurii în dreptul punctului mobil. Pentru a găsi,  $k_{\text{eqv}}(s)$ , și în cele din urmă pentru a rezolva ecuația caracteristică, este necesar să se cunoască funcția Green a operatorului ecuației (15).

Funcția Green a operatorului  $D_{x_1,s}$  are formele

$$G^-(x_1, \xi, s) = \sum_{i=1}^p A_i(\xi) \exp(\lambda_i x_1) \text{ pentru } -\infty < x_1 < \xi \quad (20)$$

$$G^+(x_1, \xi, s) = \sum_{i=p+1}^4 A_i(\xi) \exp(\lambda_i x_1) \text{ pentru } \xi < x_1 < \infty,$$

Mai departe, a treia derivată a funcției Green are o discontinuitate în  $x_1 = \xi$

$$\frac{d^3 G^+(\xi + 0, \xi, s)}{dx_1^3} - \frac{d^3 G^-(\xi - 0, \xi, s)}{dx_1^3} = \frac{1}{EI} \quad (21)$$

Toate aceste condiții conduc la următoarea ecuație matriceală

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{EI} \end{bmatrix} \quad (22)$$

unde  $X_i = A_i(\xi) \exp(\lambda_i \xi)$  pentru  $i = 1 \div p$  și  $X_i = -A_i(\xi) \exp(\lambda_i \xi)$  pentru  $i = p + 1 \div 4$ .

Matricea din ecuația (22) are determinantul Vandermonde și de fapt, toți determinanții sunt determinați astfel încât ecuația (22) are următoarele soluții

$$X_i = \frac{1}{EI \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^4 (\lambda_k - \lambda_i)} \text{ unde } i = 1 \div 4. \quad (23)$$

În fine, se obține funcția Green a operatorului  $D_{x_1,s}$

Considerații privind instabilitatea vibrației unei mase mobile pe o grindă cu fundație vâscoelastică

$$G^-(x_1, \xi, s) = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^p \frac{\exp[\lambda_i(x_1 - \xi)]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^4 (\lambda_k - \lambda_i)}, \quad -\infty < x_1 < \xi, \quad (24)$$

$$G^+(x_1, \xi, s) = -\frac{1}{EI} \sum_{i=p+1}^4 \frac{\exp[\lambda_i(x_1 - \xi)]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^4 (\lambda_k - \lambda_i)}, \quad \xi < x_1 < \infty.$$

Se poate concluziona că funcția Green este dependentă de viteză și de aceea, rigiditatea echivalentă împreună cu soluțiile ecuației caracteristice sunt de asemenea dependente de viteză.

Revenind la ecuația caracteristică (18), din punct de vedere matematic, sistemul pierde stabilitatea când cel puțin o rădăcină a ecuației caracteristice își schimbă semnul părții reale de la minus la plus. Se aplică în mod obișnuit metoda descompunerii  $D$  [15] iar ecuația (18) poate fi reformulată astfel

$$M = -\frac{k_{\text{eqv}}(s)}{s^2} \quad (25)$$

Detaliile privind modul în care metoda trebuie aplicată se vor prezenta mai târziu. În finalul acestei secțiuni, trebuie arătat faptul că metoda descompunerii  $D$  a fost aplicată în probleme de instabilitate ce se pot găsi în următoarele referințele [4, 6, 7, 9, 11-14].

#### 4. SOLUȚIA ECUAȚILOR DE MIȘCARE

În această secțiune se va prezenta soluția ecuațiilor de mișcare care descriu vibrația masei mobile pe structură, soluție care se obține printr-o procedură numerică pas cu pas cu ajutorul metodei funcțiilor Green.

În baza teoremei de convoluție aplicată ecuației (7), se poate găsi pentru deplasarea grinzii relația

$$w(x_1, t) = \int_{0-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \xi, t - \tau) Q(\tau) \delta(\xi) d\xi d\tau = \int_0^t g(x_1, 0, t - \tau) Q(\tau) d\tau \quad (26)$$

unde  $g(x_1, \xi, t - \tau)$  este funcția Green a grinzii în domeniul timp exprimată în sistemul de referință mobil.

Pentru a rezolva ecuația (3) a contactului dintre masa mobilă și structură, este nevoie de deplasarea grinzii în dreptul punctului mobil de contact

$$w(0, t) = \int_0^t g(0, 0, t - \tau) Q(\tau) d\tau \quad (27)$$

unde funcția  $g(0, 0, t-\tau)$  este calculată prin aplicarea transformării inverse Fourier

$$g(0,0,t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(0,0,\Omega) \exp[i\Omega(t-\tau)] d\Omega \quad (28)$$

Funcția Green pentru domeniul timp poate fi calculată printr-o metodă numerică descrisă de Krylov și Skoblya [20]. De exemplu, ținând seama de caracterul cauzal al modelului structurii elastice, integrala din ecuația (28) care dă funcția Green în domeniul timp a deplasării verticale a grinzii poate fi calculată după cum urmează

$$\begin{aligned} g(0,0,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(0,0,\omega) \exp i\omega t d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \alpha(0,0,\omega) \cos \omega t d\omega \cong \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} P_{\alpha}(\omega) \cos \omega t d\omega, \end{aligned} \quad (29)$$

în care  $P_{\alpha}(\omega)$  este polinomul de interpolare a părții reale a funcției  $\alpha$ ,  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_i, \dots$  cu  $\omega_0 = 0$ , este o partiție a frecvenței unghiulare, iar  $t-\tau$  este înlocuit cu  $t$  pentru simplificarea scrierii. Integrala de sub sumă se rezolvă utilizând metoda integrării prin părți. În mod evident, se calculează o sumă trunchiată din motive practice.

Trebuie notat faptul că structura alcătuită din grinda pe fundație vâscoelastică este amortizată și, ca urmare, răspunsul la un impuls se stinge după o anumită perioadă de timp  $T$  numită perioada răspunsului tranzitoriu. În aceste condiții, deplasarea grinzii poate fi aproximată prin

$$w(0,t) \cong \int_{t-T}^t g(0,0,t-\tau) Q(\tau) d\tau \quad (30)$$

Introducând ecuațiile (25) și (27) sau (30) în ecuația contactului (3), se obține ecuația de mai jos cu precizarea că aceasta este valabilă atât timp cât masa și grinda sunt în contact

$$\int_0^t h(t-\tau)[Q_0 - Q(\tau)] d\tau - \int_{t_s}^t g(0,0,t-\tau) Q(\tau) d\tau = \left[ \frac{Q(t)}{C_H} \right]^{2/3} \quad (31)$$

în care se ia  $t_s = 0$  pentru  $t < T$  și  $t_s = t - T$  pentru  $t > T$ .

Considerând o partiție de timp  $-t_0, t_1, \dots, t_n$  (cu  $t_0 = 0, t_n = t$  și  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$  unde  $i = 1 \div n$ ), ecuația de mai sus poate fi reformulată astfel

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} h(t_n - \tau)[Q_0 - Q(\tau)] d\tau - \sum_{i=n_i}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(0,0,t_n - \tau) Q(\tau) d\tau = \left[ \frac{Q(t_n)}{C_H} \right]^{2/3} \quad (32)$$

unde  $n_i = 1$  pentru  $t_n > T$  și  $n_i = n - T/\Delta t + 1$  în rest.

Presupunând că ambele funcții Green și forța de contact au o variație liniară în timpul intervalului de integrare  $[t_{i-1}, t_i]$ , și rezolvând integralele precedente, ecuația contactului devine



Considerații privind instabilitatea vibrației unei mase mobile pe o grindă cu fundație vâscoelastică

$$(Q_n / C_H)^{2/3} + (a_w + a_z)Q_n + S_w + S_z = 0 \quad (33)$$

unde

$$a_w = \frac{\Delta t(2g_n + g_{n-1})}{6}, \quad a_z = \frac{\Delta t(2h_n + h_{n-1})}{6},$$

$$S_w = \frac{\Delta t}{6} \left[ \sum_{i=n_i}^n (2g_{i-1} + g_i)Q_{i-1} + \sum_{i=n_i}^{n-1} (2g_i + g_{i-1})Q_i \right], \quad (34)$$

$$S_z = \frac{\Delta t}{6} \left[ \sum_{i=1}^n (2h_{i-1} + h_i)Q_{i-1} - 3(h_{i-1} + h_i)Q_0 + \sum_{i=1}^n (2h_i + h_{i-1})Q_i \right]$$

cu precizarea că  $h_i = h(t_n - t_i)$ ,  $g_i = g(0, 0, t_n - t_i)$  și  $Q_i = Q(t_i)$ . Se obține forța de contact prin rezolvarea numerică pe o cale iterativă a ecuației (39) și apoi se calculează deplasarea grinzii și cea a roții.

## 5. APLICAȚIE NUMERICĂ

În cele ce urmează se efectuează o analiză numerică a vibrației instabile a unei mase mobile pe o structură elastică utilizând modelul și metodele prezentate în secțiunile anterioare. Parametrii fizici luați în calcul sunt prezentați în Tabelul 1. Constanta lui Hertz corespunde curburilor șinei UIC 60 și roții cu diametrul de 1 m cu profil conic.

Tablelul 1

<i>Parametrii fizici considerați</i>	
Masa pe unitatea de lungime a grinzii	$m = 3800 \text{ kg/m}$
Rigiditatea la încovoiere	$EI = 6.42 \text{ MNm}^2$
Rigiditatea pe unitatea de lungime a fundației	$k = 7 \text{ MN/m}^2$
Amortizarea vâscoasă pe unitatea de lungime a fundației	$c = 65.24 \text{ kNs/m}^2$
Masa obiectului în mișcare (roată)	$M = 1272 \text{ kg}$
Sarcina statică	$Q_0 = 80 \text{ kN}$
Constanta lui Hertz	$C_H = 96.38 \text{ GN/m}^{3/2}$
Rigiditatea contactului	$K_H = 1.359 \text{ GN/m}$

Parametrii grinzii au fost calculați pe baza rezultatelor obținute din măsurători făcute pe o cale construită pe un sol moale. În acest caz, lăsarea șinei sub sarcina statică atinge aproximativ 5 mm așa cum au arătat Madshus și Kaynia [2]. Viteza minimă de fază a undelor este cuprinsă între 150 și 235 km/h [1, 2]. În cazul nostru, rigiditatea fundației corespunde unei lăsări a șinei de 4.13 mm sub o sarcină statică de 80 kN. Apoi, plecând de la ecuația vitezei minime de fază,  $V_{ph} = (4kEI/m^2)^{1/4}$ , se obține masa pe unitatea de lungime a grinzii.

Mai întâi, pentru a arăta proprietățile structurii elastice, se calculează receptanța grinzii în punctul mobil respectiv viteza critică utilizând ecuația caracteristică și metoda descompunerii D.

## 5.1. RECEPTANȚA GRINZII

Se utilizează receptanța pentru că analiza în timp este bazată pe funcția Green care se obține din aceasta. Se pot stabili anumite corelații între partea reală și cea imaginară a receptanței pe de o parte și regimul dinamic al grinzii, pe de alta.

Figura 2 arată partea reală și cea imaginară a receptanței în punctul de mișcare ca funcții de frecvență.

S-a ales domeniul de frecvență între 0 și 60 Hz iar viteza între 0 și 250 m/s. La viteză mică, partea reală a receptanței este pozitivă pentru frecvențe joase și schimbă semnul când frecvența este mai înaltă. Dacă viteza crește, domeniul de frecvență în care partea reală este pozitivă devine din ce în ce mai larg, și în cele din urmă ajunge să ocupe întregul domeniu luat în calcul. Partea imaginară a receptanței este negativă pentru toate vitezele mai mici de 64 m/s. Peste această valoare, apare un domeniu de frecvență în care partea imaginară a receptanței este pozitivă iar limitele acestui domeniu se extind pe măsură ce viteza crește. Trebuie să fie menționat faptul că viteza minimă de fază a undelor de încovoiere este de 60 m/s pentru grinda pe suport fără amortizare.

Se poate observa că schimbarea de semn a părții imaginare a receptanței este rezultatul undelor Doppler anormal radiate de grindă, la viteze mai mari de  $V_{ph}$  (care este 64 m/s în loc de 60 m/s datorită amortizării fundației).

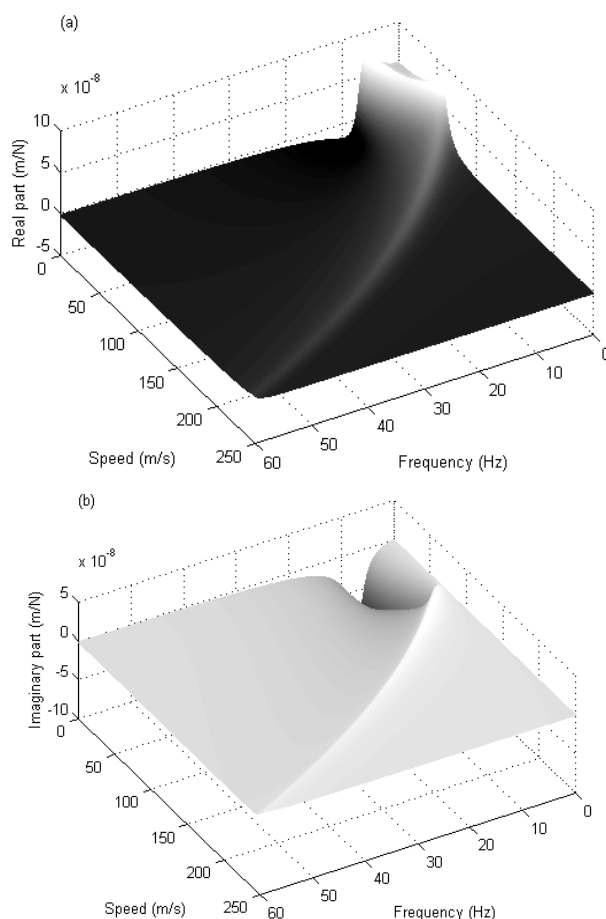


Fig. 2.

## Considerații privind instabilitatea vibrației unei mase mobile pe o grindă cu fundație vâscoelastică

În consecință, grinda prezintă așa-numita vâscozitate negativă în punctul mobil ceea ce înseamnă că este îndeplinită condiția necesară apariției instabilității unui mobil care s-ar deplasa pe grindă.

Coroborând aspectele ridicate de partea reală și cea imaginară ale receptanței la viteze înalte, rezultă că în punctul mobil grinda se comportă ca un element elasto-vâscos a cărui vâscozitate este dependentă de frecvență și poate lua valori negative într-un anumit domeniu de frecvență.

Figura 3 prezintă modulul receptanței grinzii în punctul mobil. Rezonanța grinzii sub o sarcină staționară ( $V = 0$ ) are loc la 8.7 Hz, dar frecvența de rezonanță descrește continuu pe măsură ce viteza crește de la 50 m/s. La această viteză, rezonanța grinzii dispare și mai apare doar după ce viteza forței de excitație depășește 60 m/s.

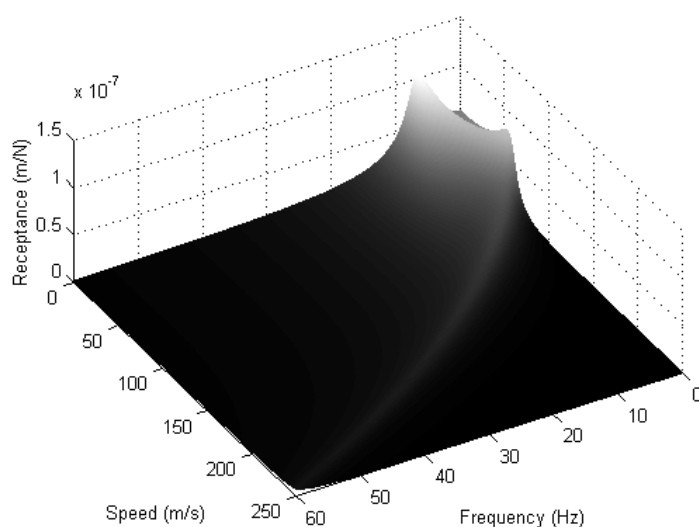


Fig. 3.

Mai departe, frecvența de rezonanță a grinzii crește o dată cu viteza. Pe de altă parte, se poate vedea că vârful de rezonanță are tendința de a descrește.

### 5.2. VITEZA CRITICĂ

Viteza critică corespunde limitei dintre stabilitatea și instabilitatea vibrației masei mobile pe grinda rezemată elastic; pentru a stabili această limită, ecuația caracteristică trebuie rezolvată folosind metoda descompunerii  $D$ .

Figura 4 arată două curbe ale descompunerii  $D$  corespunzătoare contactului elastic și respectiv contactului rigid dintre masa mobilă și grindă. Partea umbrită a liniilor este legată de partea dreaptă a axei imaginare a planului complex ( $s$ ).

Când linia este traversată în direcția părții umbrite, trebuie adăugată o rădăcină cu partea reală pozitivă. Pe de altă parte, se observă că linia intersectează axa reală a planului complex ( $\bar{M}$ ) de două ori în punctul corespunzător masei  $M = 1272$  kg.

Numărul rădăcinilor „instabile” se stabilește plecând de la observația că punctul  $(0, 0)$  al planului aparține zonei stabile, ceea ce implică că nu avem masă mobilă, iar apoi se aplică regula mai sus enunțată.

Au fost efectuate mai multe simulări numerice pentru diferite viteze  $V$  pentru a stabili precis punctul de intersecție corespunzător masei  $M$  considerată în aplicații și s-au obținut vitezele de 220 și 220,5 m/s. Frecvențele la limita de stabilitate sunt 47,87 și respectiv 52,09 Hz.

Se trage concluzia că în cazul contactului elastic viteza critică și frecvența sunt mai mici prin comparație cu situația în care contactul este rigid.

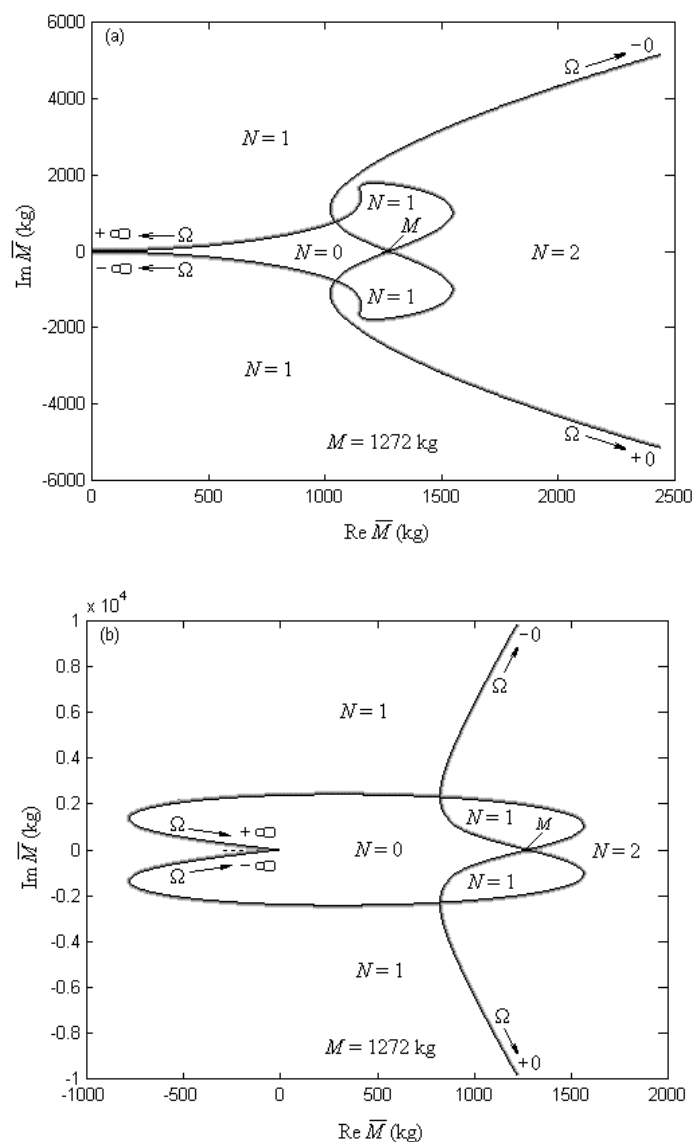


Fig. 4.

### 5.3. ANALIZA ÎN DOMENIUL TIMP

Obiectivul principal este de a analiza efectul dinamic cauzat de pierderea stabilității când viteza depășește viteza critică.

Pentru a atinge acest obiectiv, se aplică metoda funcției Green care permite analiza în timp a mișcării masei. Intervalul de frecvență ales se întinde de la 0 la 2 kHz iar pasul de integrare a fost stabilit la 0,2 Hz. Pasul de timp pentru integrarea ecuațiilor de mișcare este de 1/30 ms. Calculul s-a efectuat luând în considerare un regim tranzitoriu de 1 s.

Figura 5 arată funcția Green pentru analiza în timp în punctul mobil la viteza de 220 m/s. Întregul răspuns pare să se atenueze după o lege exponențială și este dominat de frecvența corespunzătoare valorii de vârf a receptanței la această viteză.

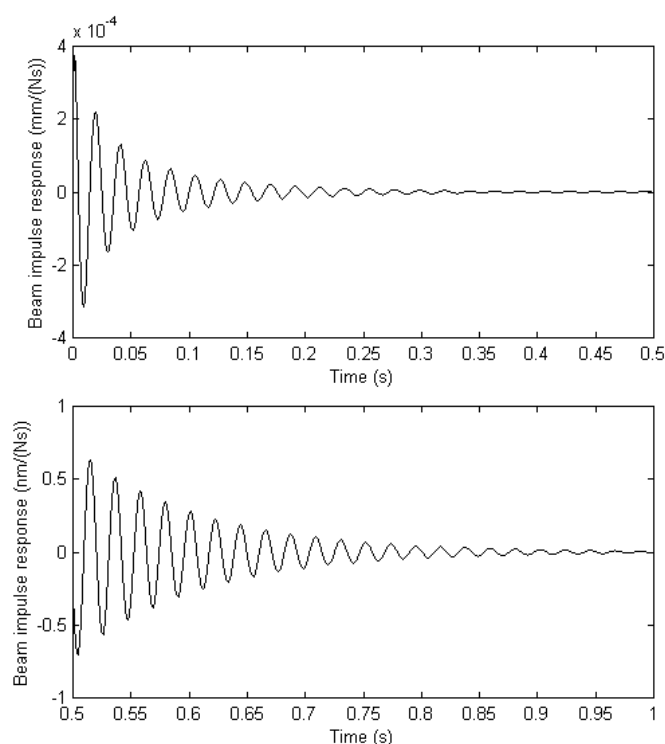


Fig. 5.

Valoarea maximă a răspunsului în timp este de cca.  $0,375 \mu\text{m}/(\text{Ns})$  dar după o secundă amplitudinea scade la mai puțin de 1/5150 din valoarea eficace calculată pentru această perioadă.

Figura 6 prezintă forța de contact dintre masa mobilă și grindă la trei viteze și anume: 219,5, 220 și 220,5 m/s, cu scopul de a puncta tranziția de la regimul stabil la cel instabil.

Se reamintește că s-au considerat condițiile inițiale corespunzătoare contactului geometric dintre masă și grindă: cele două corpuri nu sunt deformatate iar forța de contact este nulă. Ca urmare, sistemul are energie potențială care excită vibrația transversală când începe mișcarea masei.

Se poate observa cu ușurință că răspunsul este atenuat la viteza de 219,5 m/s, în timp ce vibrograma de la 220,5 m/s indică o creștere a vibrației.

În fine, la 220 m/s, amplitudinea forței de contact este practic constantă, ceea ce arată că aceasta este viteza critică și în mod evident acest rezultat este în concordanță cu cel obținut prin analiza rădăcinilor ecuației caracteristice cu ajutorul metodei descompunerii  $D$ .

Figura 7 prezintă răspunsul masei și al grinzii în punctul mobil de contact la viteza critică. Amplitudinea vibrației nu se modifică și acest aspect confirmă din nou valoarea vitezei critice. Practic, vibrația este armonică și frecvența ei corespunde valorii deja calculate.

Deplasarea masei este mai mare decât cea a grinzii în punctul mobil de contact din cauza elasticității contactului.

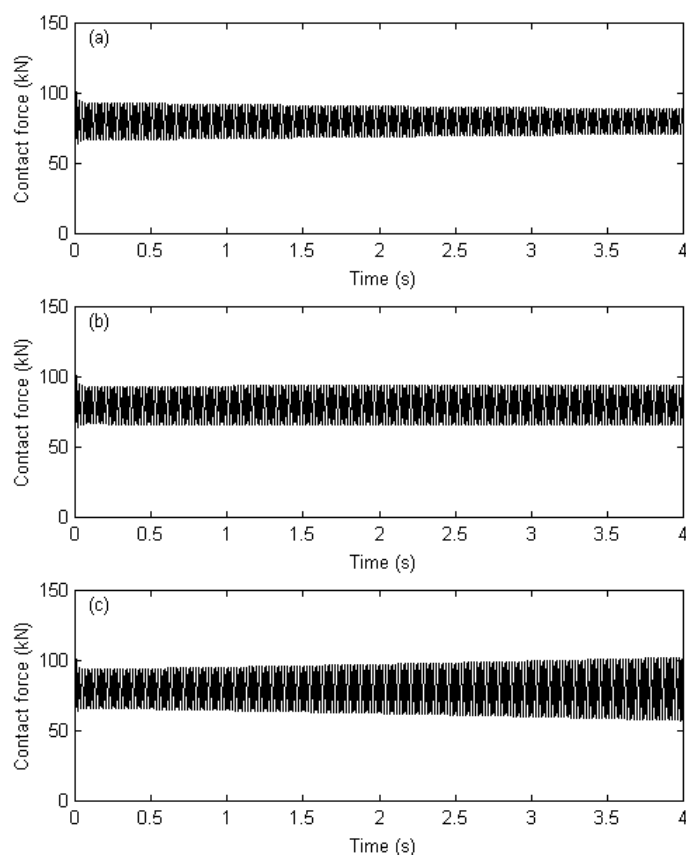


Fig. 6.

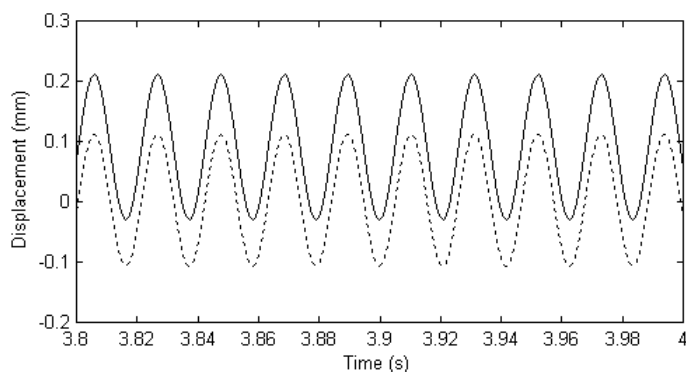


Fig. 7.

## Considerații privind instabilitatea vibrației unei mase mobile pe o grindă cu fundație vâscoelastică

Când mișcarea masei de-a lungul grinzii devine instabilă, regimul dinamic se modifică în mod radical așa cum se poate vedea în figura 8. Aici, deplasarea masei și a grinzii în punctul de contact, precum și forța de contact sunt prezentate pentru viteza de 250 m/s.

Răspunsul sistemului are două părți distincte: regimul tranzitoriu și regimul permanent. Regimul tranzitoriu poate fi împărțit în două secvențe. În timpul primei secvențe, masa este în contact permanent cu grinda însă amplitudinea crește continuu.

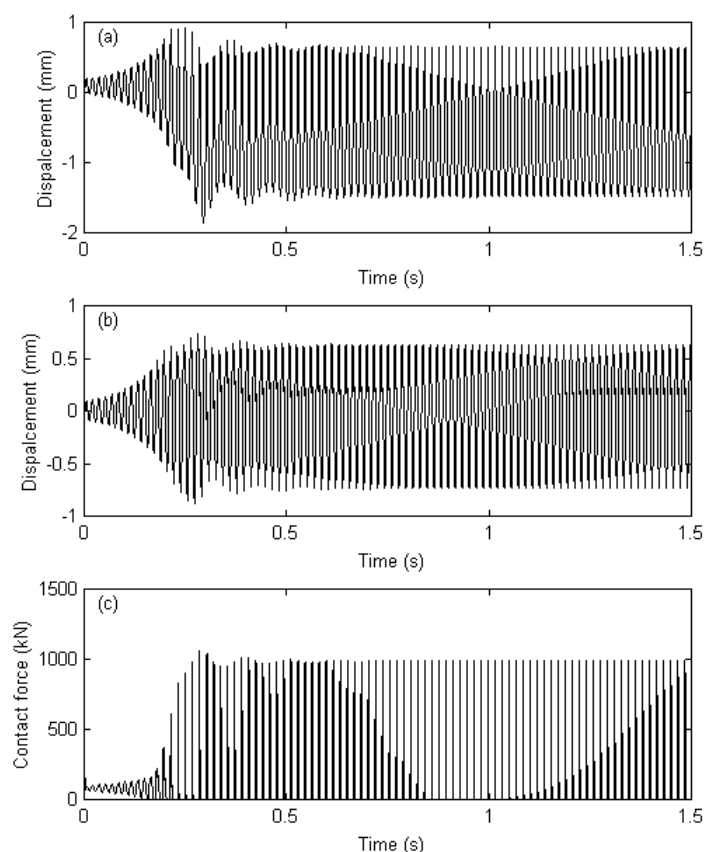


Fig. 8.

Frecvența vibrației este în jur de 62,6 Hz. În cele din urmă, se pierde contactul și începe cea de a doua parte a regimului tranzitoriu. De această dată, regimul dinamic este caracterizat de o creștere exponențială a amplitudinii și sunt înregistrate cele mai mari valori. În final mișcarea se stabilizează la o amplitudine mai mică și devine periodică – regim permanent. Răspunsul în timp poate fi văzut în detaliu în figura 9.

Figura 10 prezintă forța de contact pentru trei valori supracritice ale vitezei, respectiv 223, 226 și 229 m/s, pentru a scoate în relief influența vitezei. Aceste valori nu sunt așa de depărtate de viteza critică ca cea de la simularea precedentă. După cum se poate vedea, o schimbare mică a vitezei conduce la schimbări importante ale regimului dinamic.

Regimul tranzitoriu devine mai scurt când viteza crește. De asemenea, amplitudinea regimului permanent este modulată spre deosebire de cazul vitezei mari supracritice. Mărimea forței de contact scade o dată cu creșterea vitezei.

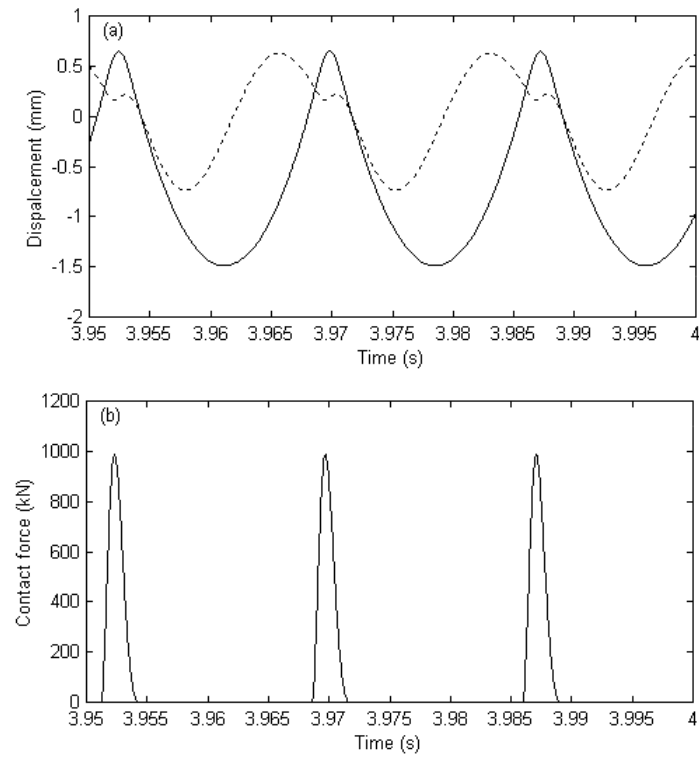


Fig. 9.

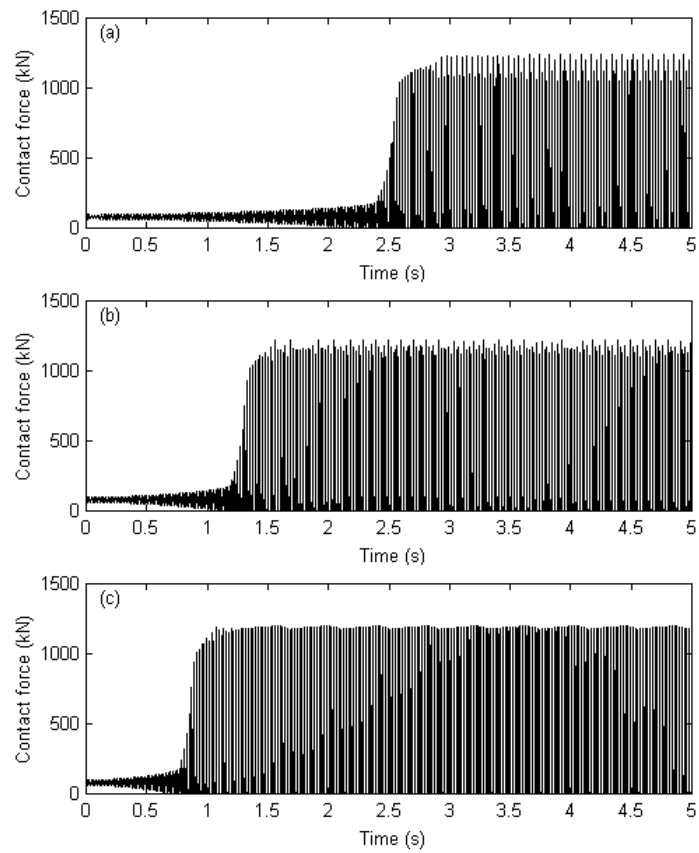


Fig. 10.



## Considerații privind instabilitatea vibrației unei mase mobile pe o grindă cu fundație vâscoelastică

Pentru a înțelege acest ultim neașteptat aspect trebuie să se menționeze că frecvența regimului permanent crește continuu odată cu viteza, pentru că grinda devine mai rigidă în punctul mobil; din această cauză, perioada mișcării devine mai mică când masa se desprinde de grindă. Masa atinge o înălțime mai mică și în consecință, forța de impact dintre masă și grindă descrește.

Cauza vibrației modulate care caracterizează regimul permanent la viteze supracritice mici este contactul neliniar hertzian. Pentru a dovedi acest lucru, se poate observa figura 11, în care este prezentată forța de contact pentru aceleași viteze, dar luând în calcul ipoteza contactului liniar.

Rigiditatea contactului a fost calculată astfel încât caracteristica să conțină punctul de deformare  $\delta_0$  dată de sarcina statică  $Q_0$ , adică.  $k_H = Q_0 / \delta_0 = \sqrt[3]{Q_0 C_H^2}$ . Se pot face trei observații.

Mai întâi, regimul tranzitoriu este mai scurt în cazul contactului liniar pentru că sistemul are o viteză critică mai mică datorită contactului care este mai elastic. În al doilea rând, forța de contact este mai mică în timpul regimului permanent.

Această diferență ar putea fi explicată de faptul că contactul neliniar hertzian are o caracteristică rigidă. În fine, în al treilea rând, așa cum s-a anticipat, regimul permanent nu are aspectul unei vibrații modulate.

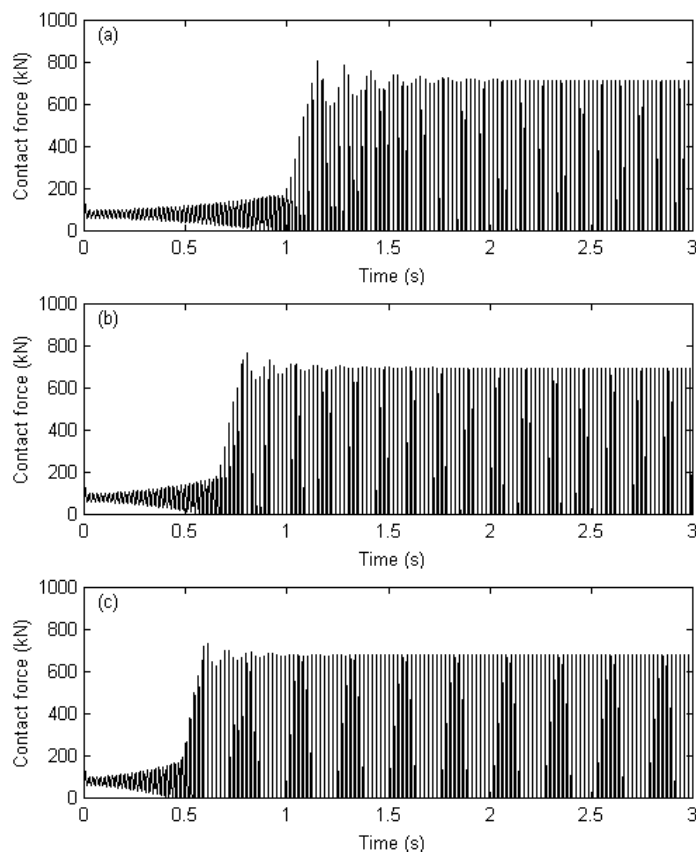


Fig. 11.

## 6. CONCLUZII

În această lucrare s-a folosit modelul simplu al unei mase mobile pe o grindă rezemată pe o fundație elastică pentru a pune în evidență principalele caracteristici ale regimului dinamic generat de pierderea stabilității datorită undelor Doppler anormale excitate în grindă. Această problemă este nouă în domeniul studiilor „forței mobile” și ea ar putea fi interesantă pentru toate cazurile în care viteza trenurilor moderne depășește viteza de fază a undelor elastice pe care acestea le induc în structura căii. Pentru aceasta, modelul format din masa mobilă și grindă ia în considerare caracteristica hertziană de contact precum și posibilitatea pierderii contactului.

Soluția numerică a ecuațiilor nelinare este obținută prin aplicarea metodei funcțiilor Green. Problema instabilității vibrației unei mase mobile a fost rezolvată plecând de la ecuația caracteristică asociată aproximării liniare a ecuațiilor de mișcare și prin aplicarea metodei descompunerii  $D$ . Ecuația caracteristică este obținută prin (i) utilizarea transformării Laplace și (ii) prin aplicarea metodei funcției Green pentru a rezolva ecuația transformată. În acest fel, a fost obținută o anumită valoare a vitezei critice care a devenit valoare de referință pentru rezultatele integrării numerice.

Simularea numerică a arătat că vibrația masei este periodică când aceasta se mișcă la viteza critică determinată anterior prin metoda descompunerii  $D$ . Dacă viteza masei este puțin diferită de cea critică, atunci fie vibrația este atenuată, fie amplificată după cum viteza este mai mică ori mai mare decât cea critică. Se confirmă cu exactitate rezultatele obținute prin integrarea numerică a ecuațiilor neliniare de mișcare. Când masa se mișcă la o viteză supracritică și vibrația ei devine instabilă, răspunsul în timp ia forma unui ciclu limită datorat acțiunii a doi factori opuși: undele Doppler anormale, care pompează energie la interfața dintre masa mobilă și grindă, forțând în acest fel ca masa să se desprindă de grindă, și sarcina statică care împinge masa în jos. În acest fel, ciclul limită este caracterizat de o succesiune de șocuri între masă și grindă. Frecvența acestor șocuri crește la viteze mai mari și, în consecință, mărimea forței de impact descrește. Ciclul limită este precedat de un regim tranzitoriu a cărui frecvență este mai mare și forța de impact atinge valoarea sa maximă. Se poate trage concluzia că regimul cel mai periculos este atunci când viteza masei este egală cu viteza critică.

Domeniul vitezelor supracritice poate fi împărțit în două zone: zona vitezelor supracritice joase când ciclul limită este modulată de influența caracteristicii hertziane a contactului neliniar și zona vitezelor supracritice înalte când această influență nu mai este sesizabilă. Când contactul dintre masă și grindă este modelat printr-un arc liniar, ciclul limită este periodic la toate vitezele supracritice. Pentru a obține o estimare corectă a forței de impact, este necesar să fie luată în calcul influența contactului hertzian neliniar. După cum s-a menționat mai înainte, modelul masei mobile de-a lungul unei grinzi pe fundație vâscoelastică reprezintă unul dintre cele mai simple modele folosite pentru interacțiunea dintre un vehicul feroviar și calea de rulare. De aceea, rezultatele din acest articol sunt numai calitative. Scopul este de a da o imagine intuitivă și ușor de înțeles a regimului de instabilitate.

Concluzii calitative pot fi adaptate de la modele care iau în considerare gradele de libertate ale vehiculului, incluzând efectul boghiului, și pe de altă parte, influența undelor de suprafață Rayleigh excitate de vehicul în subsolul căii. [24 - 25].

### MULȚUMIRI

Această lucrare a fost realizată în cadrul CNCSIS–UEFISCSU, proiect numărul 684  
PNII – IDEI cod 1699/2008.

#### Bibliografie

- [1] **J. P. Fortin** - *La déformée dynamique de la voie ferrée (Dynamic flexibility of railway track)*, Revue Général de Chemins de Fer febr. (1982) 93-102.
- [2] **C. Madshus, A. M. Kaynia** - *High-speed railway lines on soft ground: dynamic behaviour at critical train speed*, Journal of Sound and Vibration 231 (2000) 689-701.
- [3] **H. A. Dieterman, A. V. Metrikine** - *Steady-state displacements of a beam on an elastic half-space due to a uniformly moving constant load*, European Journal of Mechanics A/Solids, 16 (1997) 295-306.
- [4] **A. V. Metrikine, K. Popp** - *Instability of vibration of an oscillator moving along a beam on elastic half-space*, European Journal of Mechanics A/Solids, 18 (1999) 331-349.
- [5] **A. D. Kerr** - *The continuously supported rail subjected to an axial force and a moving load*, International Journal of Mechanical Science 14 (1972) 71-78.
- [6] **A. V. Metrikine, H. A. Dieterman** - *Instability of vibrations of a mass moving uniformly along an axially compressed beam on a viscoelastic foundation*, Journal of Sound and Vibration 201 (1997) 567-576.
- [7] **G. G. Denisov, E. K. Kugushieva, V. V. Novikov** - *On the problem of the stability of one-dimensional unbounded elastic system*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 49 (1985) 533-537.
- [8] **R. Bogacz, S. Nowakowski, K. Popp** - *On the stability of a Timoshenko beam on an elastic foundation under a moving spring-mass system*, Acta mechanica 61 (1986) 117-127.
- [9] **A. V. Metrikine** - *Unstable lateral oscillations of an object moving uniformly along an elastic guide as a result of an anomalous Doppler effect*, Acoustical Physics 40 (1994) 85-89.
- [10] **V.L. Ginsburg** - *Theoretical Physics and Astrophysics*, Oxford: Pergamon Press, 1979.
- [11] **A. R. M. Wolfert, H. A. Dieterman, A. V. Metrikine** - *Stability of vibrations of two oscillators moving uniformly along a beam on a viscoelastic foundation*, Journal of Sound and Vibration 211 (1998) 829-842.
- [12] **A. V. Metrikine, S. N. Verichev** - *Instability of vibrations of a moving two-mass oscillator on a flexible supported Timoshenko beam*, Archive of Applied Mechanics 71 (2001) 613-624.
- [13] **S. N. Verichev, A. V. Metrikine** - *Instability of a bogie moving on a flexible supported Timoshenko beam*, Journal of Sound and Vibration 253 (2002) 653-668.
- [14] **S. N. Verichev** - *Instability of a vehicle moving on an elastic structure*, PhD Thesis, Technical University Delft, 2002.
- [15] Neimark, Y. I., Dynamic systems and controllable processes. Moscow, Nauka 1978 (in Russian).
- [16] **T. Mazilu** - *Green's functions for analysis of dynamic response of wheel/rail to vertical excitation*, Journal of Sound and Vibration 306 (2007) 31-58.
- [17] **T. Mazilu** - *Prediction of the interaction between a simple moving vehicle and an infinite periodically supported rail – Green's functions approach*, Vehicle System Dynamics 48 (2010) 1021-1042.
- [18] **C. Udriște** - *Geometric Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.

- [19] **G. Mocică** - *The Laplace transform and operational methods (in Romanian)*, UPB, Bucharest, 1993.
- [20] **T.X. Wu, D. J. Thompson** - *On the impact noise generation due to a wheel passing over rail joints*, Journal of Sound and Vibration, 267 (2003) 485-496.
- [21] **T.X. Wu, D.J. Thompson** - *A hybrid model for the noise generation due to railway wheel flats*, Journal of Sound and Vibration 251 (2002) 115-139.
- [22] **T. Mazilu** - *Interaction between a moving two-mass oscillator and an infinite homogeneous structure: Green's function method*, Archive of Applied Mechanics 80 (2010) 909-927.
- [23] **V. V. Krylov** - *Generation of ground vibrations by superfast trains*, Applied Acoustics, 44 (1995) 149-164.
- [24] **G. Lombaert, G. Degrande, J. Kogut, S. Francois** - *The experimental validation of a numerical model for the prediction of railway induced vibrations*, Journal of Sound and Vibration 297 (2006) 512-535.
- [25] **A. V. Vostroukhov** - *Three-dimensional Dynamic Models of a Railway Track for High-speed Trains*, PhD Thesis, Technical University Delft, 2002.