

**STAREA DE TENSIUNE ȘI DEFORMAȚIE ÎN CAZUL UNUI CORP ÎNCĂRCAT CU UN SISTEM COMPENSAT DE SARCINI; SOLUȚIE PRIVIND SCHEMA DE ÎNCĂRCARE A UNEI GRINZI SIMPLU REZEMATE CU DEFORMAȚII FINALE NULE**

**STUDY CONCERNING THE POSSIBILITY OF SELECTING THE LOAD LAW OF DISTRIBUTION  $q(x)$  WHICH IS NOT IDENTICALLY ZERO, IN ORDER TO KEEP ONE GIVEN BEAM STRAIGHT**

**Ș. I. dr. ing. Ștefan MOCANU**

Universitatea Tehnică de Construcții București  
b-dul Lacul Tei 124, sector 2 RO-72302, Romania  
e-mail: mocanustef@gmail.com

**Rezumat:** Înscriindu-se în mod firesc în pleiada de aplicații ce circumscriu nivelul didactic usual, problema de față, extrasă din aceeași culegere “de modă-veche” precum multe din aplicațiile ce au făcut obiectul unora dintre articolele prezentate până acum, preia studiul posibilității încărcării cu o lege de distribuție oarecare a unei grinzi simplu rezemate în scopul păstrării formei inițiale a fibrei medii deformată a acesteia și după aplicarea schemei de încărcare.

**Cuvinte cheie:** încovoiere, diagrame, deformații, element finit, Axis VM.

**Abstract:** The present paper is focused on the possibility of selecting one load law of distribution, not identically zero, in order to keep one given beam straight; the article has its start point due to an “old-fashioned” selected problems and questions in strength of materials handbook, in our opinion, a true golden source concerning auxiliary and inspirational reference in today's educational process.

**Keywords:** bending, diagram, deflections, finite element analysis, Axis VM.

## **1. INTRODUCERE**

Continuând seria de articole ce propune readucerea în atenție a cărților și culegerilor așa-zise de modă-veche [3], implicit a modalităților particulare de abordare a diverselor probleme didactice și nu numai, tratarea de față pleacă de la o întrebare simplă cu rezolvare teoretică și verificare a acesteia ceva mai deosebite; se pune, astfel, problema existenței unei legi oarecare de distribuție a unei sarcini distribuite care, acționând asupra unei grinzi simplu rezemate, să nu modifice forma inițială a fibrei medii deformată a acesteia după aplicarea schemei de încărcare.

## 2. ABORDARE CLASICĂ. SCHEMĂ DE CALCUL

Pentru parcurgerea etapei de calcul s-a utilizat grinda simplu rezemată din figura 1, grinda fiind supusă inițial acțiunii, în exclusivitate, a unei sarcini distribuite cu lege oarecare de distribuție. Pentru exemplul numeric s-au utilizat valorile:  $l = 1\text{m}$ ,  $h = 80\text{mm}$ ,  $b = 30\text{mm}$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{N/mm}^2$ ,  $G = 7,9 \cdot 10^4 \text{N/mm}^2$ ,  $\sigma_a = 200 \text{N/mm}^2$ ,  $\eta = \frac{6}{5}$ .

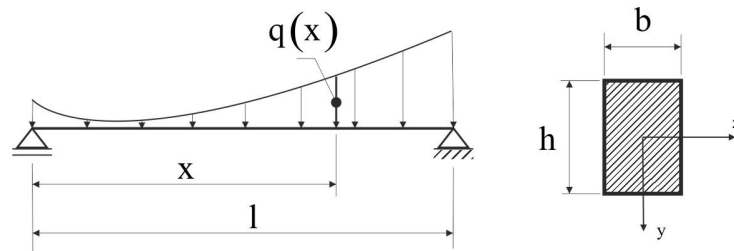


Fig.1 Schema de calcul

Raționamentul poate porni de la ecuația fibrei medii deformată, scrisă în formă aproximativă [1,2,7]:

$$\frac{1}{\rho} = y''(M) = -\frac{M}{EI}; \quad (1.1)$$

cu notația  $y(T)$  pentru deplasările datorate forței tăietoare (sarcina distribuită produce forțe transversale ce nu pot fi neglijate), rotirea unei secțiuni se poate exprima în forma:

$$y'(T) = \eta \frac{T}{GA}, \quad (1.2)$$

în care  $\eta$  reprezintă un coeficient de formă ce depinde de tipul secțiunii utilizate [6,7].

Ținându-se seama și de relațiile diferențiale dintre eforturi și încărcări la bare drepte [1,2,7], ecuația (1.1) se poate rescrie:

$$y''(T, M) = \eta \frac{M''}{GA} - \frac{M}{EI}. \quad (1.3)$$

Condiția de anulare a expresiei (1.3)(inexistența deplasărilor după aplicarea sarcinii), duce la o ecuație diferențială de forma:

$$M'' - \alpha^2 M = 0, \quad (1.4)$$

Starea de tensiune și deformație în cazul unui corp încărcat cu un sistem compensat de sarcini; soluție privind schema de încărcare a unei grinzi simplu rezemate cu deformații finale nule

cu notația  $\alpha = \sqrt{\frac{GA}{\eta EI}}$ , cu soluții [4, 5]:

$$M(x) = C_1 \cdot e^{\alpha x} + C_2 \cdot e^{-\alpha x}, \quad (1.5)$$

sau

$$M(x) = B_1 \sinh \alpha x + B_2 \cosh \alpha x, \quad (1.6)$$

cu  $B_1, B_2, C_1, C_2$ , constante de integrare ce se obțin din condiții la limită.

Ținându-se seama de relațiile diferențiale dintre eforturi și încărcări la bare drepte [1,2,7], polinoamele ce descriu legile de variație ale forței tăietoare, respectiv sarcinii distribuite, sunt:

$$T(x) = \alpha \cdot B_1 \cosh \alpha x + \alpha \cdot B_2 \sinh \alpha x, \quad (1.7)$$

$$-q(x) = \alpha^2 \cdot B_1 \sinh \alpha x + \alpha^2 \cdot B_2 \cosh \alpha x. \quad (1.8)$$

Din condiții la limită, pentru o grindă simplu rezemată:

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow M_{st.} = 0; \\ x = 1 &\rightarrow M_{dr.} = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

se ajunge, în primă instanță, la soluția banală  $B_1 = B_2 = 0$ , așadar  $q = 0$  (grinda păstrează forma nedeformată pentru o intensitate **nulă** a sarcinii distribuite), variantă lipsită de interes.

Luând în considerare, însă, posibilitatea de a modifica schema de încărcare cu elemente convenabil alese, se poate opta ca valoarea momentului de pe reazemul stâng să rămână nulă, reazemul drept fiind supus acțiunii unui moment încovoietor concentrat  $M_{dr.} \neq 0$ . Astfel, din prima condiție la limită a grupului (1.9), se obține:

$$x = 0 \rightarrow M_{st.} = 0, \Rightarrow B_2 = 0, \quad (1.10)$$

polinomul (1.6) rescriindu-se în forma:

$$M(x) = B_1 \sinh \alpha x, \quad (1.11)$$

cu forța tăietoare și sarcina distribuită corespunzătoare:

$$T(x) = \alpha \cdot B_1 \cosh \alpha x, \quad (1.12)$$

$$-q(x) = \alpha^2 \cdot B_1 \sinh \alpha x. \quad (1.13)$$

Se ajunge la schema simbolică de calcul din figura 2, astfel:

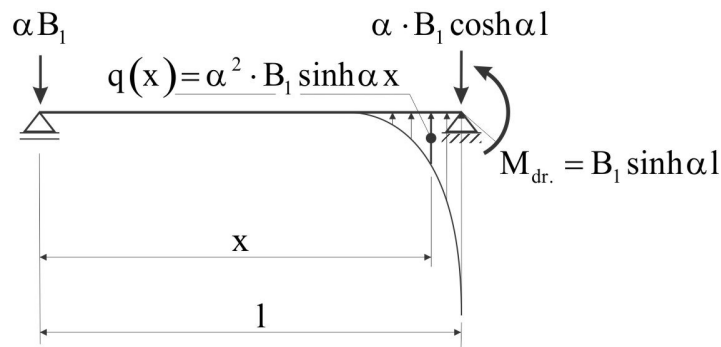


Fig. 2 Schema simbolică de calcul

schemă pe care au fost reprezentate și reacțiunile (forțele de legătură) din reazeme.

### 3. ABORDARE CU METODA ELEMENTULUI FINIT

Pentru verificarea valabilității soluției propuse, se calculează parametrii schemei de calcul în baza datelor numerice inițiale ale problemei, astfel:

$$\alpha = \sqrt{\frac{7,9 \cdot 10^4 \cdot 30 \cdot 80}{\frac{6}{5} \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{30 \cdot 80^3}{12}}}, \quad \alpha = 2,4245 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^{-1};$$

$$M_{dr.}^{cap.} = W_{ax} \cdot \sigma_a, \quad M_{dr.}^{cap.} = \frac{30 \cdot 80^2}{6} \cdot 200, \quad M_{dr.}^{cap.} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ Nmm};$$

se alege  $M_{dr.} = 6 \text{ kNm}$ ;

$$B_1 = \frac{6 \cdot 10^6}{\sinh(2,4245 \cdot 10^{-2})}, \quad B_1 = 3,55 \cdot 10^{-4} \text{ Nmm};$$

$$q(x) = 2,087 \cdot 10^{-7} \sinh(\alpha x).$$

Schema de calcul este verificată cu versiunea academică a aplicației software AxisVM, ținându-se seama de limitările impuse de caracterul demonstrativ al acesteia (nu mai mult de 40 elemente ale structurii analizate, etc.), în plus, legea de variație a sarcinii distribuite  $q(x)$  necesitând un mod de discretizare particular în ceea ce privește schema de încărcare a modelului ales (aplicația software **nu** permite alegerea unor legi de variație sofisticate ca polinom); eșantionarea legii de variație a sarcinii distribuite s-a realizat pentru un pas de 0,01m, în zona de maxim interes situată către reazemul drept al grinzii, obținându-se setul de valori determinat cu ajutorul unui algoritm de calcul tabelar (figura 3):

Starea de tensiune și deformație în cazul unui corp încărcat cu un sistem compensat de sarcini;  
 soluție privind schema de încărcare a unei grinzi simplu rezemate cu deformații finale nule

x	$\alpha \cdot x$	Sinh( $\alpha \cdot x$ )	q
0.82	19.8809	2.15E+08	44.9412485
0.83	20.12335	2.74E+08	57.2716677
0.84	20.3658	3.5E+08	72.9851537
0.85	20.60825	4.46E+08	93.00991
0.86	20.8507	5.68E+08	118.528809
0.87	21.09315	7.24E+08	151.049266
0.88	21.3356	9.22E+08	192.49228
0.89	21.57805	1.18E+09	245.305911
0.9	21.8205	1.5E+09	312.609887
0.91	22.06295	1.91E+09	398.37989
0.92	22.3054	2.43E+09	507.682396
0.93	22.54785	3.1E+09	646.97396
0.94	22.7903	3.95E+09	824.482607
0.95	23.03275	5.03E+09	1050.69386
0.96	23.2752	6.42E+09	1338.97014
0.97	23.51765	8.18E+09	1706.34007
0.98	23.7601	1.04E+10	2174.50438
0.99	24.00255	1.33E+10	2771.11778
1	24.245	1.69E+10	3531.42251

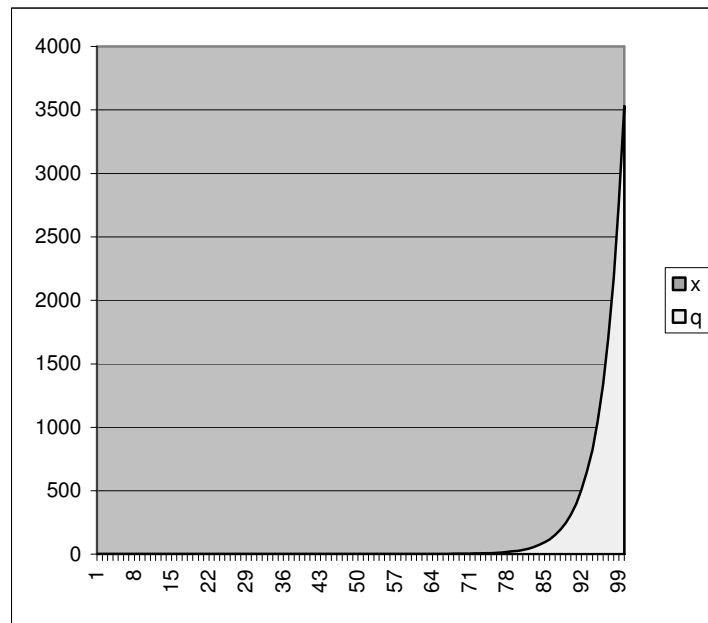


Fig.3 Legea de variație a sarcinii q(x)

Mărimile de ieșire corespunzătoare exemplului ales indică o soluție corect aleasă, în figurile 4 și 5 fiind reprezentate diagramele de efort, respectiv deformația grinzii simplu rezemate în discuție, astfel:

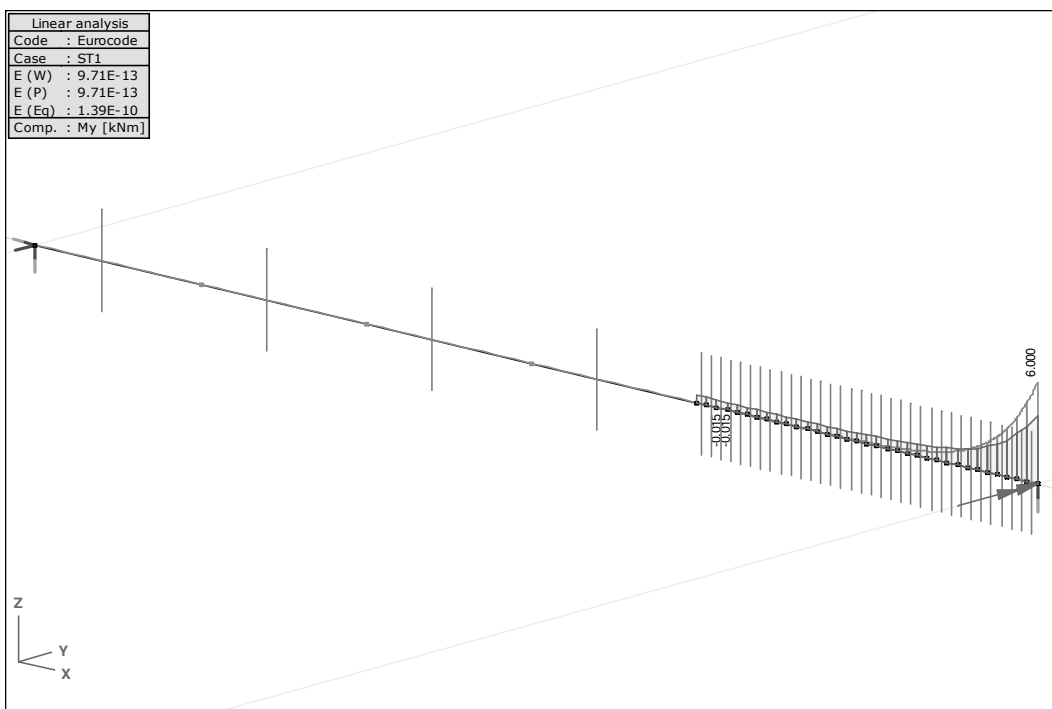
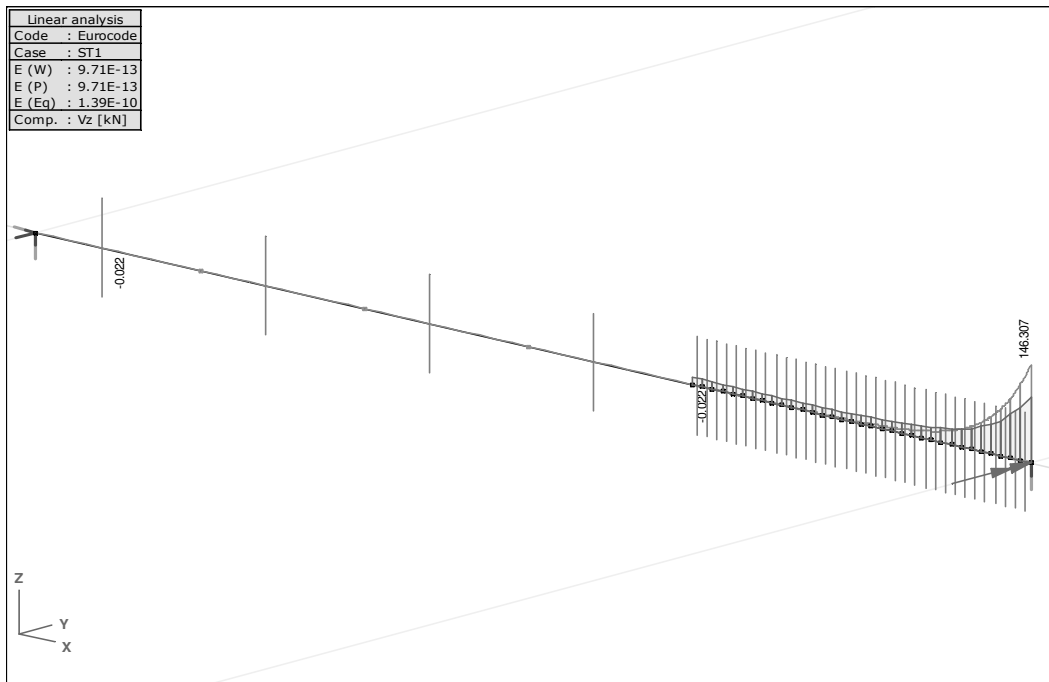


Fig. 4 Diagrame de efort secțional

Starea de tensiune și deformație în cazul unui corp încărcat cu un sistem compensat de sarcini;  
soluție privind schema de încărcare a unei grinzi simplu rezemate cu deformații finale nule

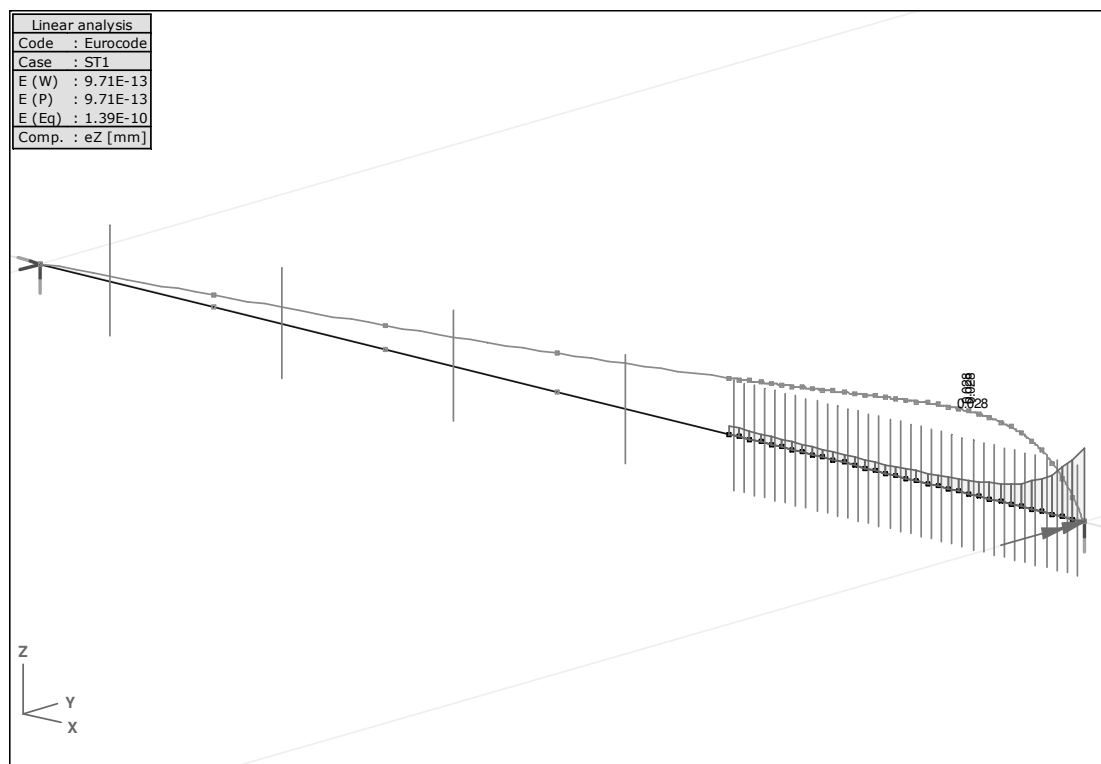


Fig. 5 Proiecția deplasării pe verticală a secțiunilor grinzii

### 3. CONCLUZII

Se poate remarca gradul de convergență al rezultatelor, atât din punctul de vedere a valorilor eforturilor secționale cât și a valorii maxime (practic neglijabilă) a proiecției deplasării pe verticală,  $v_{\max} = 0,028 \text{ mm}$ , valoare ce confirmă ipoteza de calcul inițial impusă.

Eroarea de calcul obținută ar putea tinde către zero în cazul utilizării variantei complete a aplicației software utilizate, situație în care pasul de eșantionare a sarcinii distribuite cu variație complexă nu ar depinde de valoarea maximă limitată a numărului de elemente de discretizare posibile (maxim 40 de elemente pentru versiunea utilizată).

În ciuda aparentei simplități, problema tratată în acest mod confirmă tratarea tradițională a problemei, constituind, deasemeni, un bun mijloc de validare a diverselor soluții numerice de calcul propuse, odată cu punerea în evidență și a eventualelor puncte slabe ale acestora.

### Bibliografie

- [1] **Deutsch I** - „*Rezistența materialelor*”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [2] **Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.** - „*Rezistența materialelor*”, vol.II, Institutul de Construcții București, 1981.
- [3] **Feodosiev V.I.** - „*Selected problems and questions in Strength of Materials*”, MIR Publishers Moscow, 1977.
- [4] **Luzin N.N.** - „*Calcul diferențial*”, Editura Tehnică, București, 1954.
- [5] **Vigodski M.** - „*Mathematical Handbook*”, MIR Publishers Moscow, 1975.
- [6] **Popov E.P.** , „*Mechanics of Materials*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [7] **Andreescu I., Mocanu Șt.** - „*Compendiu de Rezistența Materialelor*”, Matrix Rom, București, 2005.