

ASPECTE PRIVIND UTILIZAREA METODELOR NUMERICE LA MODELAREA COMPORTAMENTULUI STRUCTURILOR SOLICITATE LA FLAMBAJ LATERAL

ISSUES CONCERNING LATERAL – TORSIONAL BUCKLING STRUCTURAL BEHAVIOUR SIMULATION IN MODERN F.E.A. APPROACH

Ș. I. dr. ing. Ștefan MOCANU¹

¹Universitatea Tehnică de Construcții București
B-dul Lacul Tei 124, sector 2 RO-72302, Romania
e-mail: mocanustef@gmail.com

Rezumat: Flambajul lateral al structurilor svelte din domeniul mecanic sau al construcțiilor civile industriale a făcut obiectul a numeroase studii de-a lungul timpului. Scopul prezentului articol este de a compara abordarea clasică a problemei conform Rezistenței Materialelor în raport cu algoritmi numerici utilizați în aplicațiile de analiză a comportamentului structurilor, algoritmi ce au la bază metoda elementului finit.

Cuvinte cheie: flambaj, pierderea stabilității, forma_de_echilibru, elastic, sarcină, critic.

Abstract: The sudden loss of structural stability for slender structures in both mechanical and civil engineering areas has been the object of numerous studies. The present paper is focused on elementary strength of materials calculus concerning critical force values vs. finite element analysis results concerning lateral – torsional buckling of a simple beam.

Keywords: buckling, failure_mode, elastic_instability, critical_force.

1. INTRODUCERE

Este știut faptul că un element structural supus solicitării de încovoiere va avea capacitatea portantă direct proporțională cu valoarea momentului de inerție axial în raport cu axa neutră a secțiunii; în cadrul activității de proiectare acest fapt conduce la tendința de realizare a unor secțiuni înalte și înguste, aceste tipuri de elemente devenind însă instabile datorită apariției fenomenului de pierdere a stabilității formei de echilibru elastic i.e. flambaj lateral [1, 2].

Prezentul articol se dorește a fi un punct de plecare în abordarea cu ajutorul algoritmilor numerici ce au la bază metoda elementului finit a problemelor de stabilitate laterală a structurilor svelte supuse la încovoiere, gradul ridicat de complexitate al aplicației impunând un studiu atent în ceea ce privește setul de condiții inițiale impuse ca marimi de intrare.

2. TRATARE CLASICĂ (ANALITICĂ). EXEMPLU NUMERIC

De la prima soluționare a problemei (Prandtl), chestiunea flambajului lateral a cunoscut mai multe variante de rezolvare, funcție de particularitățile schemei de încărcare și/sau celei de rezemare (în special). Astfel, pentru cazul unei console solicitate la încovoiere pură ca în figura 1, valoarea momentului încovoiător de flambaj va putea fi determinată din considerente energetice [2].

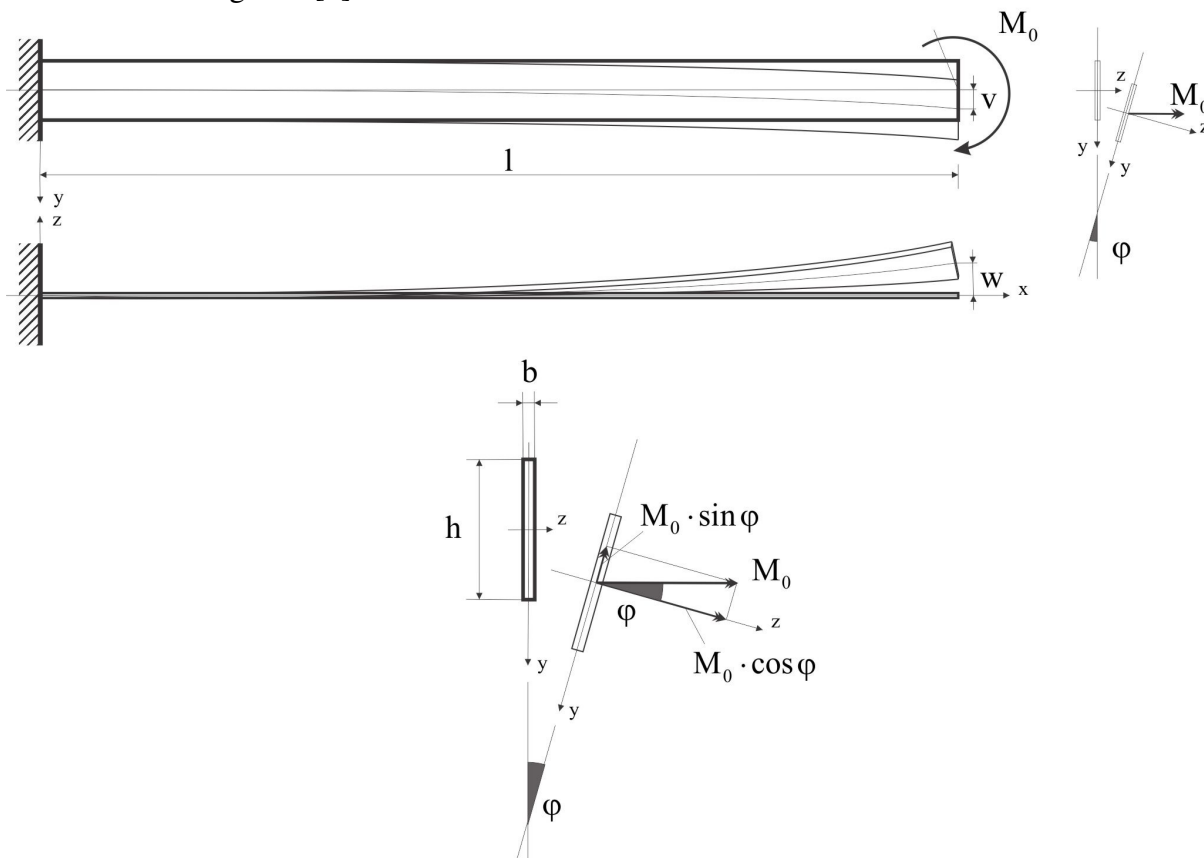


Fig.1 Abordare analitică

Astfel, pentru valori mici ale momentului încovoiător concentrat M_0 , consola se deformează doar în planul vertical xOy , poziția de echilibru obținută având caracter stabil. Când cuplul M_0 atinge valoarea critică M_f , poziția de echilibru anterior obținută devine instabilă, noua poziție de echilibru fiind obținută ca în figura 1; dacă pentru poziția de echilibru stabil în planul xOy singurele deformații sunt săgețile v produse în planul amintit, după apariția fenomenului de flambaj (lateral), apar și deformații w datorate încovoierii în planul xOz , precum și deformații din torsiune φ , ambele mai mari ca deformația din plan vertical, v .

Ținându-se seama de aspectul energetic al deformării sistemelor de bare elastice se utilizează bilanțul de forma:

$$L_e = U_i, \quad (1.1)$$

Aspecte privind utilizarea metodelor numerice la modelarea comportamentului structurilor
solicitate la flambaj lateral

pentru o încărcare statică, lucrul mecanic al sarcinilor exterioare L_e fiind egal cu energia potențială de deformație U_i [1, 2, 3].

Membrul stâng al ecuației de bilanț (1.1) se exprimă prin produsul dintre momentul încovoietor concentrat M_0 și unghiul de rotire în jurul axei acestuia, de exemplu α , membrul drept fiind exprimat prin suma energiilor potențiale de deformație prin încovoiere laterală (planul xOz) și torsiune, astfel:

$$M_0 \cdot \alpha = \frac{1}{2EI_y} \int_0^l M_y^2 dx + \frac{1}{2GI_t} \int_0^l M_t^2 dx. \quad (1.2)$$

Avându-se în vedere relația de definire a deformației specifice la torsiune:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_t}, \quad (1.3)$$

ultimul termen al relației (1.2), energia potențială de deformație din solicitarea de torsiune, devine:

$$U_{M_t} = \frac{GI_t}{2} \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx. \quad (1.4)$$

Pentru exprimarea lucrului mecanic al încărcărilor exterioare se consideră că unghiul α de rotire a momentului M_0 în jurul axei sale se va datora, în principal, deformațiilor datorate încovoierii laterale a structurii, cantitatea datorată încovoierii în plan vertical fiind neglijabilă în comparație cu aceasta; folosind teorema lui Castigliano se obține:

$$\alpha = \frac{\partial U_{M_y}}{\partial M_0}. \quad (1.5)$$

Conform figurii 1, $M_y = M_0 \sin \varphi \cong M_0 \cdot \varphi$, de unde rezultă expresia energiei potențiale de deformație din solicitarea de încovoiere laterală:

$$U_{M_y} = \frac{1}{2EI_y} \int_0^l M_0^2 \varphi^2 dx, \quad (1.6)$$

prin substituție în (1.5), se obține valoarea lui α :

$$\alpha = \frac{1}{EI_y} \int_0^l M_0 \varphi^2 dx. \quad (1.7)$$

Cu relațiile de mai sus, bilanțul (1.2) se exprimă în forma:

$$\frac{M_0^2}{EI_y} \int_0^l \varphi^2 dx = \frac{M_0^2}{2EI_y} \int_0^l \varphi^2 dx + \frac{GI_t}{2} \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx, \quad (1.8)$$

de unde rezultă expresia momentului critic de flambaj:

$$M_0^2 = M_f^2 = EI_y GI_t \frac{\int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^l \varphi^2 dx}. \quad (1.9)$$

Pentru rezolvare se admite o lege de variație convenabilă a deformației totale la răsucire ca funcție de x , de exemplu:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad (1.10)$$

ce satisface condițiile la limită:

$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow \varphi=0; \\ x=l &\Rightarrow \varphi=\varphi_{\max}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

După prelucrări se ajunge la forma finală a cuplului de flambaj pentru exemplul ales, astfel:

$$M_f = \frac{\pi}{2l} \sqrt{EI_y GI_t}, \quad (1.12)$$

pentru alte scheme de calcul obținându-se relații similare, fiind de remarcat ca element caracteristic al flambajului lateral, produsul rigidităților la solicitările de încovoiere laterală, respectiv torsiune.

Pentru studierea cantitativă a tratării problemei, se alege exemplul numeric pentru care se păstrează notațiile din figura 1, astfel, $h = 60\text{mm}$, $b = 5\text{mm}$, $l = 1\text{m}$, $E = 2,1\text{e}5\text{N/mm}^2$, $G = 7,9\text{e}4\text{N/mm}^2$; prin înlocuire în relația (1.12), se ajunge la valoarea cuplului de flambaj:

$$\begin{aligned} M_f &= \frac{\pi}{2 \cdot 10^3} \sqrt{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{60 \cdot 5^3}{12} \cdot 7,9 \cdot 10^4 \cdot 0,33 \cdot 60 \cdot 5^3}; \\ M_f &= 2,51 \cdot 10^5 \text{ Nmm}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

3. ABORDARE CU METODE NUMERICE

Indiferent de tipul exact al aplicației software sau de platforma /sistemul de operare utilizat, gradul relativ ridicat de complexitate al problemei impune rezolvarea acesteia în doi pași: o analiză a flambajului în domeniul liniar, care va furniza valoarea estimată a sarcinii

Aspecte privind utilizarea metodelor numerice la modelarea comportamentului structurilor solicitate la flambaj lateral

critice de flambaj, urmată de o analiză neliniară, având drept încărcare sarcina inițială multiplicată cu coeficientul de siguranță la flambaj anterior stabilit [7].

Acest mod de lucru este datorat faptului că analiza liniară (linear buckling analysis) estimează sarcina critică de flambaj (în speță, coeficientul de siguranță la flambaj – load factor) pentru forma nedeformată a structurii, pe când așa-zisa analiză neliniară (non-linear buckling analysis) va reface etapa de calcul liniară ținându-se cont de modul de deformare al structurii. Generic vorbind, analiza neliniară va trata de o manieră secvențială valorile schemei de încărcare a structurii, pentru fiecare treaptă de încărcare fiind recalculată matricea rigiditate a structurii la starea corespunzătoare de deformare [8, 9, 10].

Utilizându-se datele din exemplul numeric ales, se modelează consola și se încarcă în extremitatea liberă cu momentul încovoietor concentrat de valoare

$$M_0 = \frac{M_f}{6} \Rightarrow M_0 = 41,94 Nm,$$

fiind practic impus un coeficient de siguranță la flambaj de valoare 6.

În urma parcurgerii etapei liniare de analiză (fig.2), se constată confirmarea valorii impuse pentru coeficientul de siguranță la flambaj, cu observația că așa-numita deformată obținută nu are vreo semnificație fizică, aceasta făcând referire la modul de flambaj (buckling mode sau mode shape).

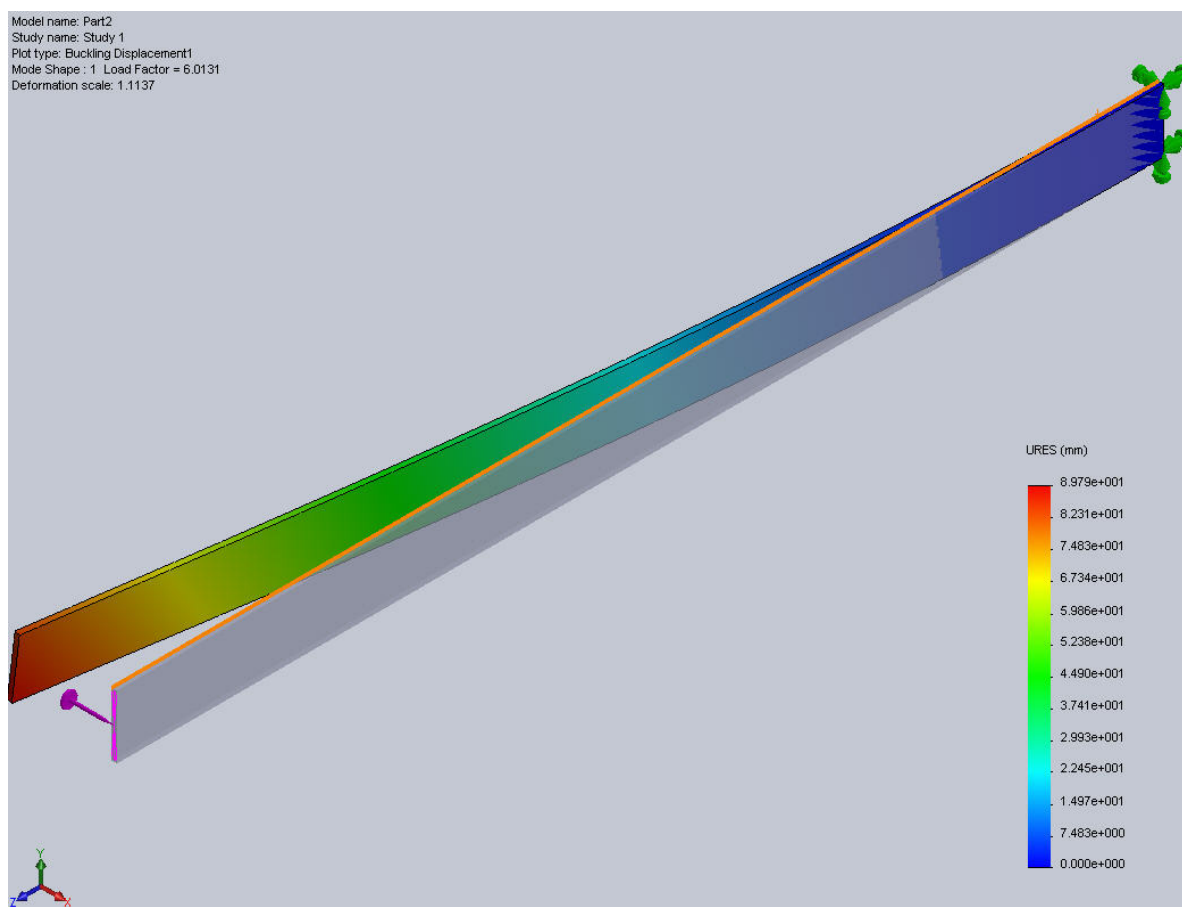


Fig.2 Analiza liniară a structurii

Etaapa finală a studiului implică parcurgerea analizei neliniare pentru structura aleasă, valoarea momentului încovoietor din schema de încărcare fiind multiplicată cu coeficientul de siguranță obținut la pasul anterior, astfel:

$$M_0 = M_f = 252,19 Nm,$$

pentru această treaptă de calcul fiind esențiale setările particulare ale caracteristicilor analizei efectuate [7].

Indiferent de aplicația software utilizată [7, 9, 10], găsirea soluțiilor unei probleme de analiză cu ajutorul F.E.M. implică rezolvarea simultană a mai multor ecuații, existând două mari familii de metode de rezolvare: metoda directă, ce utilizează algoritmi numerici de tipul matrice inversă, descompunere LU, Gauss-Jordon, respectiv metode iterative, în cadrul cărora se utilizează tehnici de calcul aproximative pentru găsirea unei soluții, secvența de calcul repetându-se până la obținerea gradului de convergență impus.

În cazul de față se optează pentru studiul cu algoritm de rezolvare direct DSS (Direct Sparse Solver), avându-se în vedere că algoritmi iterativi implicați de rezolvare FFEPlus (Fourier Finite-Element Plus), se pretează mai curând la analize de tip liniar (fig. 3).

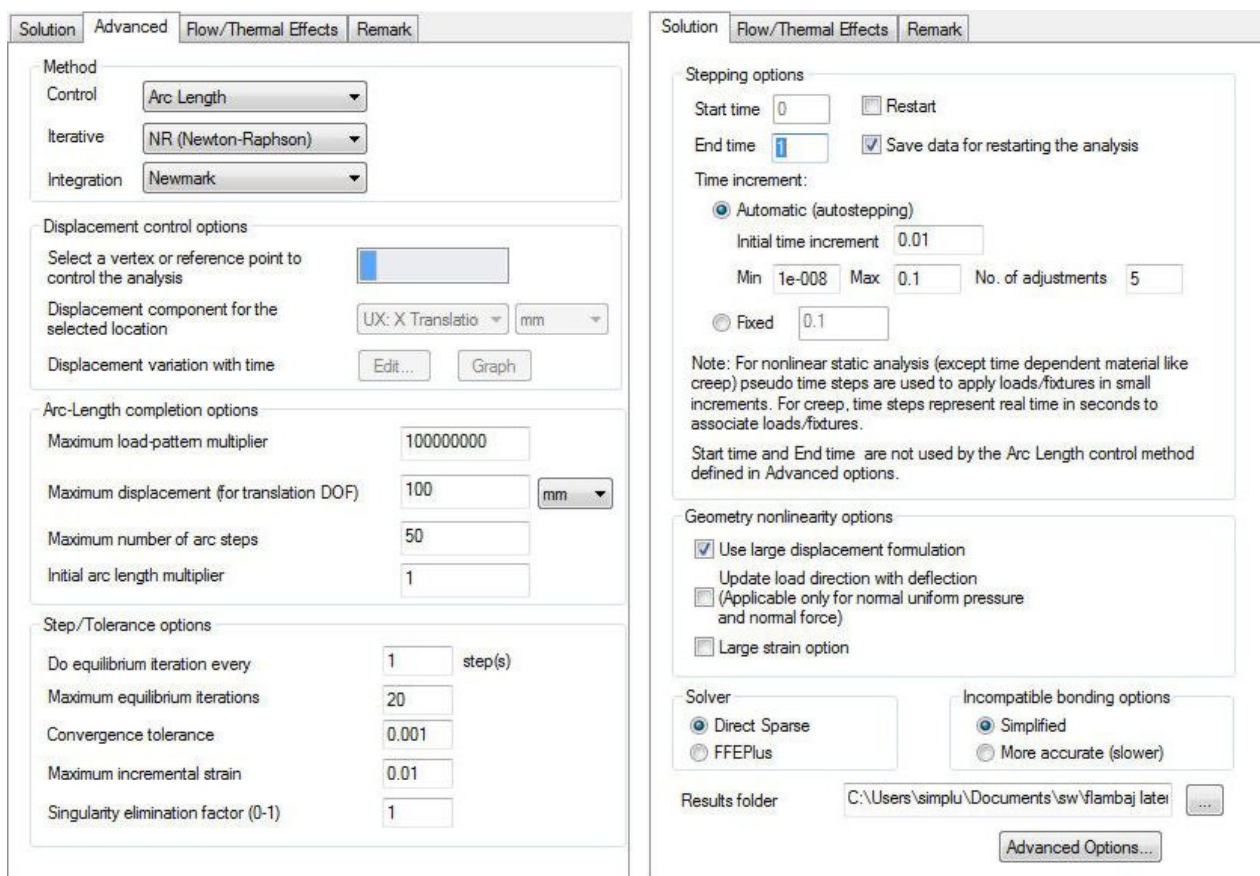


Fig.3 Setări analiza neliniară

Aspecte privind utilizarea metodelor numerice la modelarea comportamentului structurilor
solicitate la flambaj lateral

În urma mai multor încercări de simulare, gradul maxim de precizie al soluțiilor (incluzând și absența mesajelor de eroare), se obține pentru metoda Crisfield-Riks de control pentru simularea numerică (Incremental Arc Length Control Method), respectiv pentru metoda de calcul iterativ Newton-Raphson (NR) (fig.3).

În cazul analizei neliniare, sistemul de ecuații de rezolvat la momentul generic $t + \Delta t$, este de forma:

$$\{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t} = 0, \quad (1.14)$$

în care $\{R\}_{t+\Delta t}$ reprezintă matricea vectorilor sarcinilor exterioare aplicate în nodurile structurii, iar $\{F\}_{t+\Delta t}$ matricea vectorilor eforturilor interne la nivelul nodurilor; necesitatea utilizării unei metode iterative este dată de dependența valorii matricii $\{F\}_{t+\Delta t}$ de matricea deplasărilor nodurilor rețelei de elemente $\{u\}_{t+\Delta t}$ la momentul dat. Astfel, forma simplificată a unei trepte de calcul (iterație de rang i), poate fi reprezentată prin setul de relații:

$$\begin{aligned} \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} &= \{\Delta R\}^{(i-1)}, \\ \{\Delta R\}^{(i-1)} &= [K]_{t+\Delta t}^{(i)} \{\Delta u\}^{(i)}, \\ \{\Delta u\}^{(i)} &= \{u\}_{t+\Delta t}^{(i)} - \{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}, \\ \{u\}_{t+\Delta t}^0 &= \{u\}_t; \quad \{F\}_{t+\Delta t}^0 = \{F\}_t, \end{aligned} \quad (1.15)$$

unde:

- $\{R\}_{t+\Delta t}$ – matricea sarcinilor exterioare la nivelul nodurilor structurii;
- $\{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}$ – matricea eforturilor interne din nodurile rețelei, la iterația de rang “ i ”;
- $\{\Delta R\}^{(i-1)}$ – matricea vectorilor de sarcină reziduală (out-of-balance load vector), la iterația de rang “ i ”;
- $\{\Delta u\}^{(i)}$ – matricea treaptă pentru deplasări, la iterația de rang “ i ”;
- $\{u\}_{t+\Delta t}^{(i)}$ – matricea deplasărilor, la iterația de rang “ i ”;
- $[K]_{t+\Delta t}^{(i)}$ – matricea Jacobian (tangent stiffness), la iterația de rang “ i ”.

Metoda Newton-Raphson de calcul iterativ este reprezentată schematic în figura 4, în ordonată fiind reprezentate sarcinile exterioare, iar în abscisă deplasările; se remarcă reestimarea termenilor matricii Jacobian pentru fiecare iterație efectuată în cadrul treptei de calcul dată ($R_t \div R_{t+\Delta t} / u_t \div u_{t+\Delta t}$).

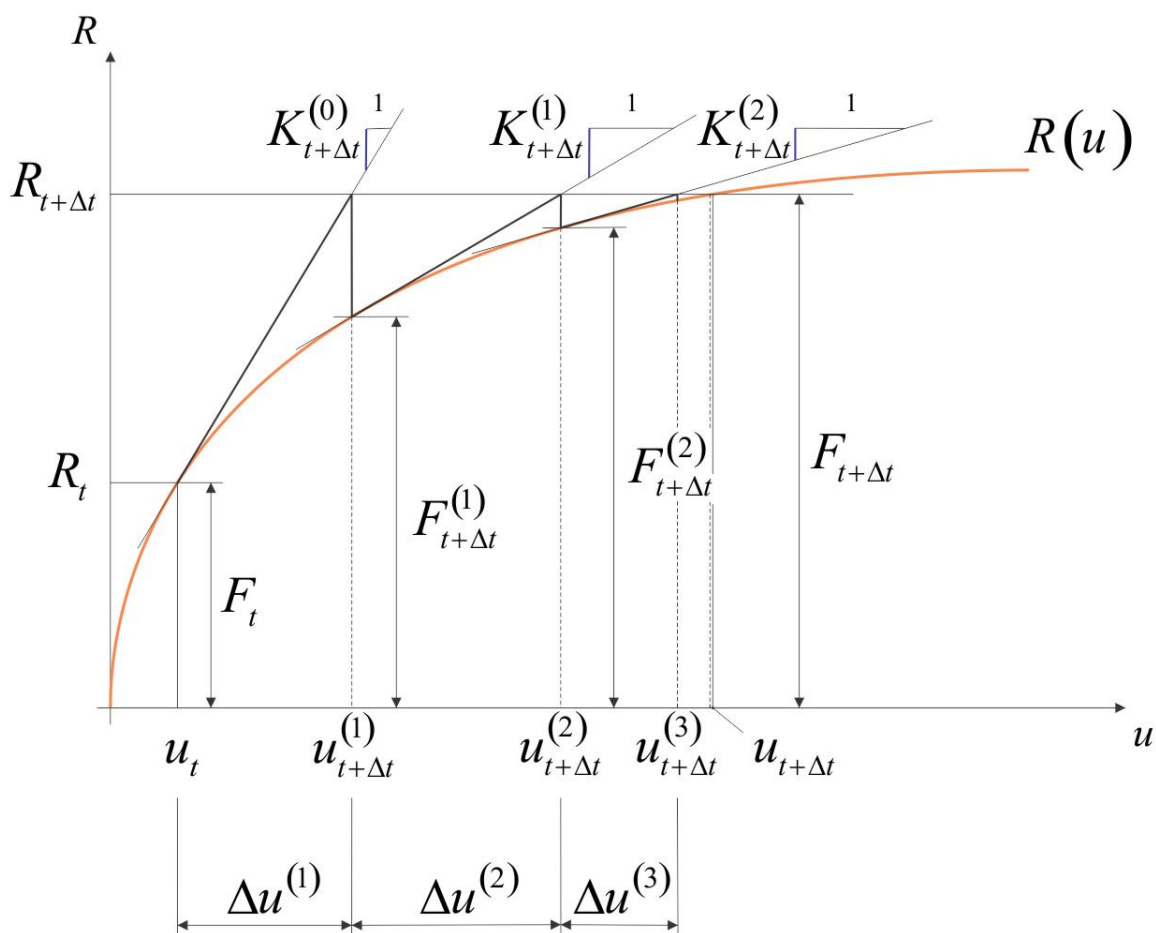


Fig.4 Metoda N-R de calcul iterativ

Utilizarea algoritmului de rezolvare nelinier este datorată în principal amplitudinii deformațiilor structurale, nemaiputând fi ignorate modificările termenilor matricii rigiditate odată cu creșterea sarcinii; în cazul unor aplicații de ultimă generație se remarcă prezența unei opțiuni dedicate de calcul nelinier (large displacement formulation), cu luarea în calcul a deformațiilor mari ale structurii studiate, varianta valabilă în cazul utilizării discretizării de tip solid (solid meshing) sau membrană (shell) [7].

4. CONCLUZII

Convergența soluției obținute se poate constata din setul de mărimi de ieșire prezentate în figura 5, set conform căruia valoarea coeficientului de siguranță la flambaj este în imediata vecinătate a valorii unitare, fiind astfel confirmată valoarea critică de flambaj sugerată de analiza liniară anterior efectuată, precum și valabilitatea tratării analitice clasice.

Aspecte privind utilizarea metodelor numerice la modelarea comportamentului structurilor solicitate la flambaj lateral

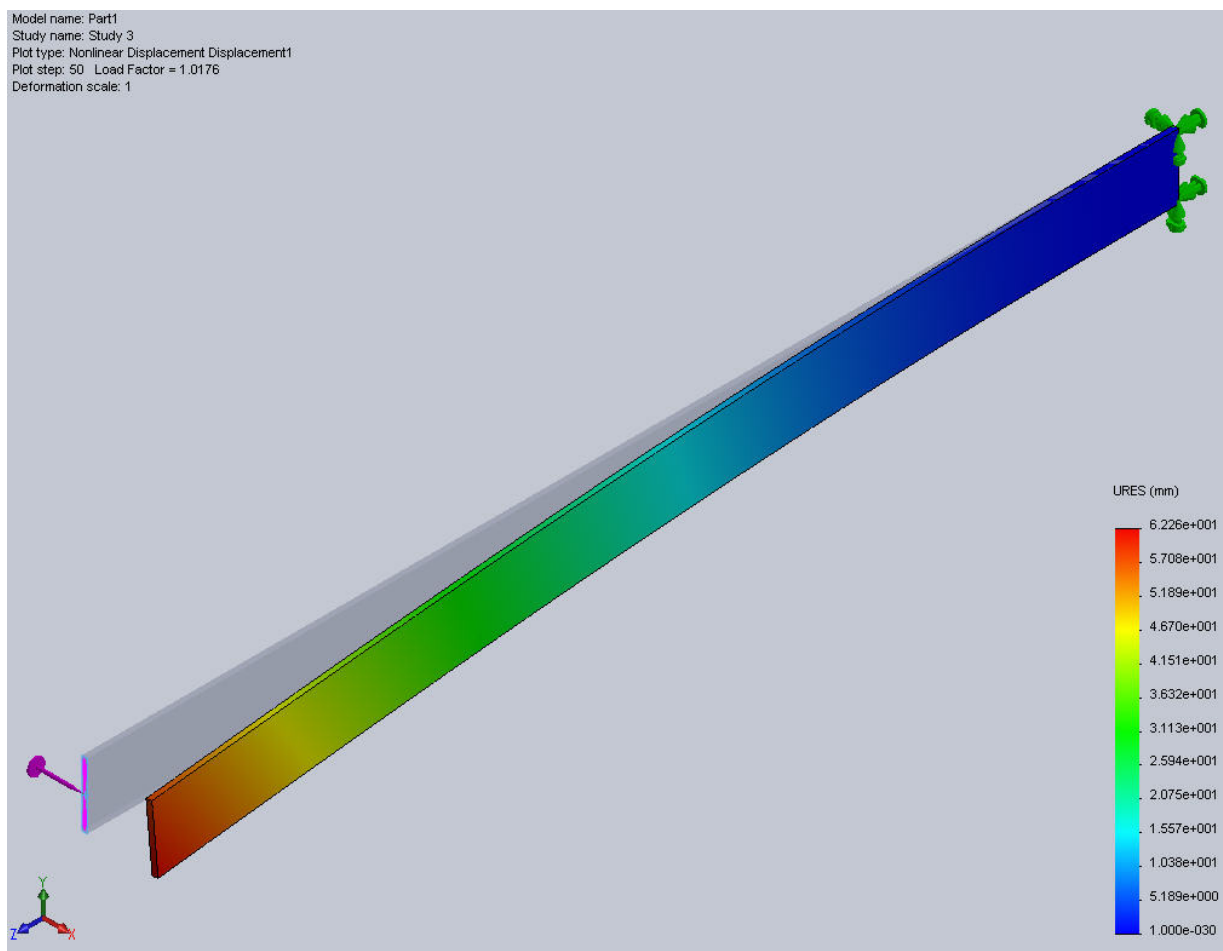


Fig.5 Analiza neliniară a structurii

În urma studiului efectuat a fost constatat și un anumit grad de dispersie a rezultatelor în cazul utilizării diverselor aplicații software și/sau mediilor/ platformelor de lucru utilizate (Ansys, Solidworks/Windows, Salome-Meca, OpenFoam, Code Aster/ Linux), rămânând astfel valabilă regula folosirii, prin comparație, a cel puțin două variante de abordare.

Pentru cazul studiat, de departe, rangul de precizie cel mai ridicat al rezultatului (având drept referință soluțiile analitice tradiționale), a fost obținut pentru aplicațiile software comerciale de ultimă generație, remarcându-se pași semnificativi și pentru familia open-source de programe în ceea ce privește algoritmi neliniari de analiză în baza metodei elementului finit, făcându-se totuși simțită absența unor programe de implementare dedicate (scheme de rezemare/ încărcare greoaie, lipsa unor opțiuni bogate în ceea ce privește setările motoarelor de rezolvare – solvers, etc.).

Referințe

- [1] **Buzdugan Ghe.**, „*Rezistența materialelor*”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964.
- [2] **Deutsch I.**, „*Rezistența materialelor*”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [3] **Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.**, „*Rezistența materialelor*”, *vol.II*, Institutul de Construcții București, 1981.
- [4] **Andreescu I., Mocanu Șt.**, „*Compendiu de Rezistența Materialelor*”, Matrix Rom, București, 2005.
- [5] **Vigodski M.**, „*Mathematical Handbook*”, MIR Publishers Moscow, 1975.
- [6] **Popov E.P.**, „*Mechanics of Materials*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [7] http://help.solidworks.com/2012/English/SolidWorks/cworks/IDH_HELP_NONLINEAR_SOLUTION.htm.
- [8] <http://ecad-engineering.co.uk/13-direct-sparse-and-ffeplus-solvers/>.
- [9] http://www.kxcad.net/ansys/ANSYS/ansyshelp/thy_tool10.html.
- [10] <http://www.code-aster.org/V2/spip.php?article282>.
- [11] <http://www.csc.fi/english/pages/elmer/documentation>.