

SCURT COMENTARIU CU REFERIRE LA ECHILIBRUL ȘI STAREA DE TENSIUNE A UNEI BARE DREPTE DE SECȚIUNE CIRCULARĂ, SUPUSĂ LA SOLICITAREA DE TORSIUNE

A BRIEF REINSTATEMENT CONCERNING THE INTERNAL STRESS STATE OF A CIRCULAR TWISTED STRAIGHT ROD

Ș. I. univ. dr. ing. Ștefan MOCANU

Universitatea Tehnică de Construcții București
b-dul Lacul Tei 124, sector 2 RO-72302, Romania
E-mail: mocanustef@gmail.com

Rezumat: În cazul solicitării de răsucire (torsiune) a unei piese de secțiune circulară, eforturile unitare tangențiale τ ce iau naștere la nivelul unei secțiuni transversale oarecare au valoarea direct proporțională cu raza măsurată în raport cu axa longitudinală a corpului; scopul articolului este de a studia și preciza modul de echilibrare al momentului incovoietor ce apare ca urmare a secționării corpului cu un plan longitudinal, moment generat de eforturile unitare datorate legii dualității tensiunilor tangențiale.

Cuvinte cheie: torsiune, circulară, echilibru, dualitate, tensiuni, simulare, element, finit.

Abstract: When a circular straight rod is twisted, shearing stresses τ occur on any given cross-section, whose magnitude is proportional to the distance r measured from the axis of the rod; the main purpose of present paper is to establish and simulate in which way a longitudinally cut-off part of the rod can preserve its equilibrium state.

Keywords: torsion, circular, equilibrium, duality, shear, stress, simulation, finite, element.

1. INTRODUCERE

În practica didactică uzuală, un loc special îl ocupă așa-zisele probleme elementare care, pornind de la o chestiune cu enunț scurt, permit tratarea unor elemente mai puțin evidente pentru un capitol de studiu dat. Articolul de față își propune reluarea unei tratări mai vechi, cu care autorul a intrat în contact în anii studenției, prin intermediul unei culegeri de probleme și întrebări de Rezistența Materialelor [3], adusă în atenție de către coordonatorul de seminar, regretatul asist. dr. ing. E. Constantinescu.

2. TRATARE ANALITICĂ

Se consideră un tronson de lungime l dintr-o bară de secțiune circulară plină de diametrul $d = 2R$, unde R reprezintă raza maximă a secțiunii (fig.1).

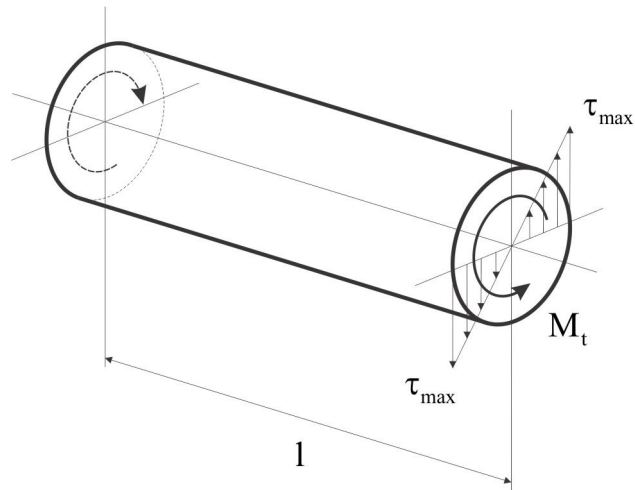


Fig.1

Prin secționarea cu un plan longitudinal-orizontal (xOz) la nivelul de grosime $2R$ al tronsonului (fig.2), la nivelul suprafeței secțiunii longitudinale iau naștere, conform legii dualității tensiunilor tangențiale [1,2,6,7], eforturi unitare tangențiale τ de expresie:

$$\tau = \tau_{\max} \frac{r}{R}. \quad (1.1)$$

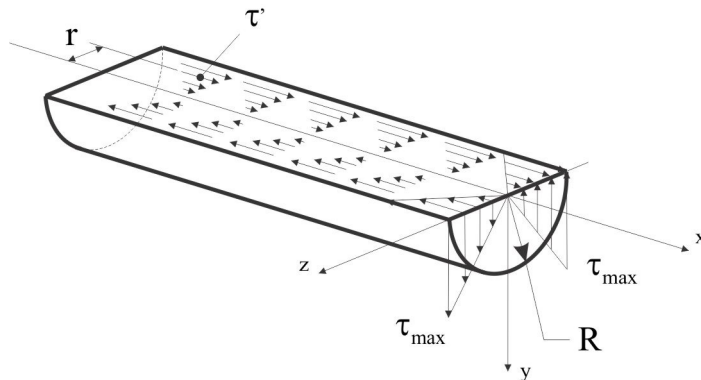


Fig.2

Momentul rezultat în raport cu axa Oy , generat de către eforturile unitare tangențiale τ , are expresia (fig.3):

$$M = 2 \int_0^R \tau \cdot l \cdot dr \cdot r, \quad (1.2)$$

în formă finală [4,5]:

$$M_y = \frac{2}{3} l R^2 \tau_{\max} \quad (1.3)$$

Scurt comentariu cu referire la echilibrul și starea de tensiune a unei bare drepte de secțiune circulară, supusă la solicitarea de torsiune

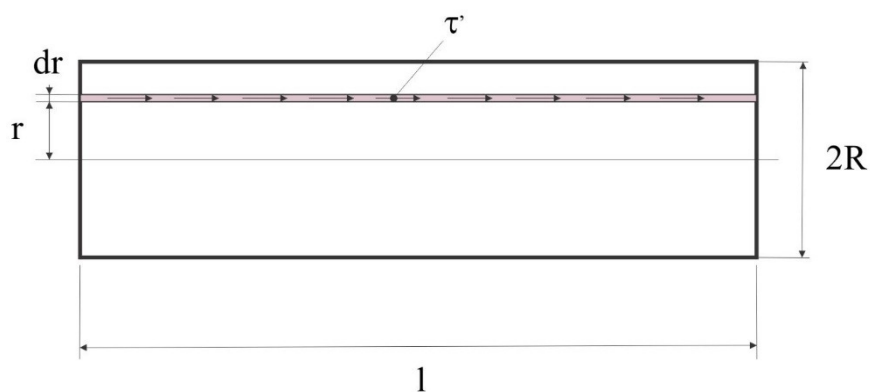


Fig.3

Starea de echilibru a corpului din figura 2 este satisfăcută de către momentul în raport cu axa Oy , M'_y , moment generat de rezultanta tensiunilor tangențiale ce acționează pe suprafața secțiunii transversale rămasă după secționare (fig.4), suprafață de forma unei jumătăți de cerc.

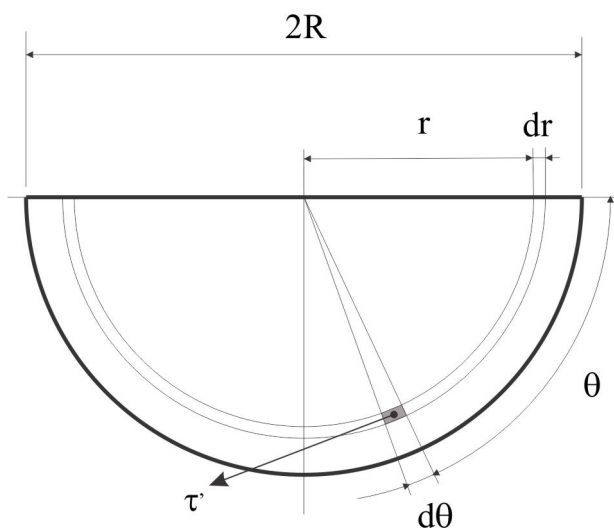


Fig.4

Sensul momentului M'_y este invers celui dat de relația (1.3), valoarea fiind dată de expresia:

$$M'_y = 1 \int_0^R \int_0^\pi \tau \cdot r \, d\theta \cdot dr \sin \theta, \quad (1.4)$$

după prelucrări [4,5]:

$$M'_y = M_y = \frac{2}{3} 1 R^2 \tau_{\max}, \quad (1.5)$$

fiind astfel satisfăcută condiția de echilibru static.

3. TRATAREA PROBLEMEI CU METODE NUMERICE

Pentru validarea rezultatelor raționamentului teoretic de mai sus s-a recurs la modelarea cu ajutorul unei suite de calcul prin metoda elementului finit [8], a unui exemplu efectiv ($2R = 80\text{ mm}$, $l = 1\text{ m}$, $M_t = 2e3\text{ Nm}$), mărimile de ieșire (legile de distribuție ale eforturilor unitare tangetiale la nivelul secțiunilor de interes), fiind evidențiate în figura 5.

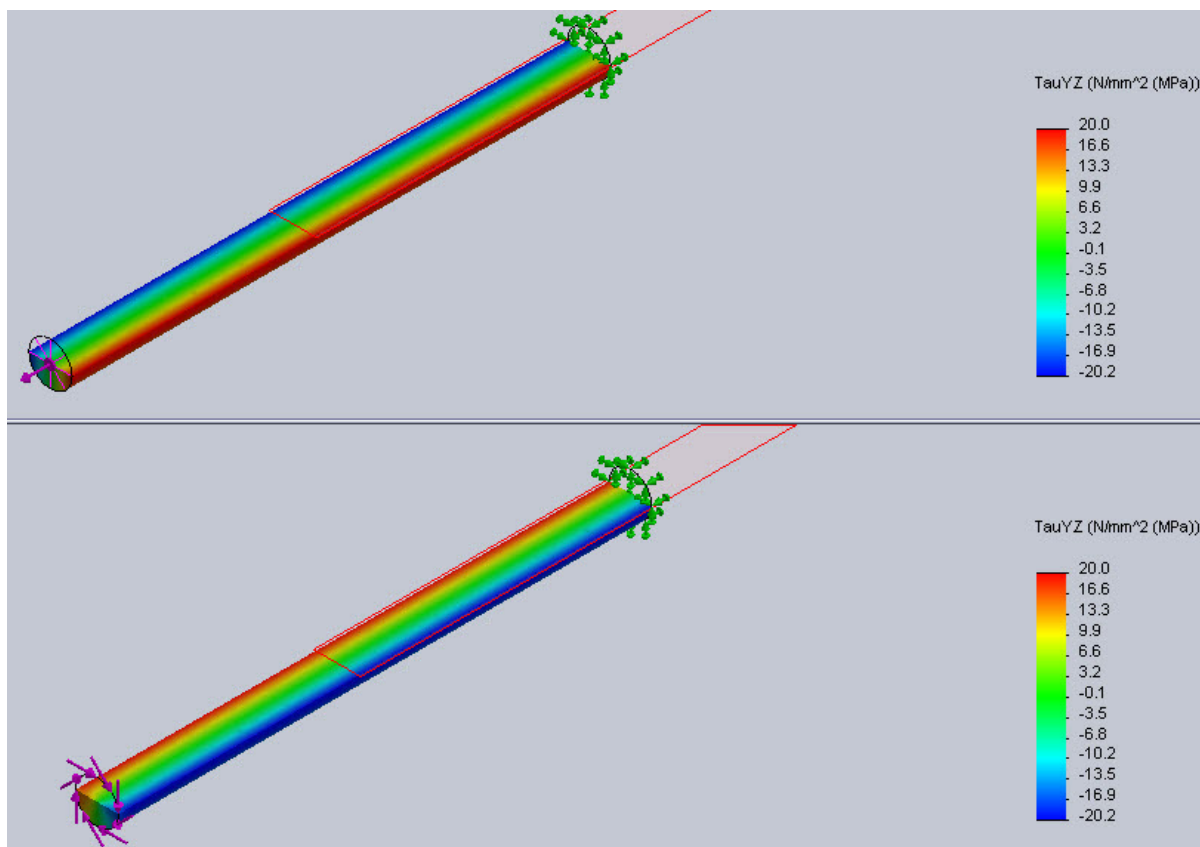


Fig.5

4. CONCLUZII

Este de remarcat gradul de convergență al rezultatelor, atât din punctul de vedere a legii de variație și a confirmării legii dualității tensiunilor tangetiale, cât și prin prisma valorilor cantitative furnizate de sub-rutina solverului utilizat; prin înlocuire directă în formula de exprimare a tensiunii tangetiale la nivelul unei secțiuni circulare sau inelare [1,2,6,7], se obține:

$$\tau_{\max} = \frac{2e6 \cdot 16}{\pi \cdot 80^3} \Rightarrow \tau_{\max} = 19,9\text{ MPa}. \quad (1.6)$$

În ciuda simplității aparente, problema de mai sus confirmă studiile clasice existente, tratarea prin comparație constituind în același timp și un mijloc de validare a diverselor soluții numerice de calcul apărute.

Scurt comentariu cu referire la echilibrul și starea de tensiune a unei bare drepte de secțiune circulară, supusă la solicitarea de torsiune

Referințe

- [1] **Deutsch I.** , „Rezistența materialelor”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [2] **Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.**, „Rezistența materialelor”, vol.II, Institutul de Construcții București, 1981.
- [3] **Feodosiev V.I.** , „Selected problems and questions in Strength of Materials”, MIR Publishers Moscow, 1977.
- [4] **Luzin N.N.** , „Calcul diferențial”, Editura Tehnică, București, 1954.
- [5] **Vigodski M.** , „Mathematical Handbook”, MIR Publishers Moscow, 1975.
- [6] **Popov E.P.** , „Mechanics of Materials”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [7] **Andreescu I., Mocanu Șt.** , „Compendiu de Rezistența Materialelor”, Matrix Rom, București, 2005.
- [8] *** COSMOS/M – Finite Element System, User Guide, 1995.