

# INFLUENȚA FORMEI GEOMETRICE ASUPRA STĂRII DE TENSIUNE ȘI DEFORMAȚIE LA SISTEME SPAȚIALE

## SPATIAL FRAME GEOMETRY VS. STRESS – DEFLECTION ANALYSIS AND OPTIMISATION

Ș. I. dr. ing. Ștefan MOCANU

Universitatea Tehnică de Construcții București  
b-dul Lacul Tei 124, sector 2 RO-72302, Romania  
e-mail: mocanustef@gmail.com

**Rezumat.** *Articolul tratează influența modului geometric de alcătuire al unui sistem spațial încărcat normal pe planul său, influență exercitată asupra stării de tensiune și deformație a acestuia. La obținerea mărimilor de ieșire considerate criterii de performanță ale studiului, s-au folosit pentru comparare și validare ulterioară a metodelor, maniera clasică de abordare din Rezistența Materialelor precum și metoda de analiză cu ajutorul elementului finit.*

**Cuvinte cheie:** *cadru, spațial, analiză, deplasări, Maxwell - Mohr.*

**Abstract.** *The goal of present paper is to present an comparison optimisation algorithm concerning spatial frame geometry vs. stress – deflection analysis. Both classic and finite element solving methods are considered in order to obtain a synthetic validation for output measurements.*

**Keywords:** *spatial, frame, analysis, deflection, Maxwell-Mohr.*

### 1. INTRODUCERE

Aplicația ce creează suportul discuției de față ilustrează în mod strălucit recomandarea din anii studenției de a nu judeca vreodată o problemă de Rezistența Materialelor (cel puțin...), după aspectul figurii sau lungimea textului acesteia; se va fi ajuns, în final, la un răspuns poate puțin probabil, fiind prilejuită și o trecere în revistă a cunoștințelor ce țin de stabilirea deformațiilor la sisteme elastice de bare prin metode energetice. Cu această ocazie, autorul continuă și seria de tratări paralele a diverselor teme de Rezistența Materialelor cu ajutorul aplicațiilor software de tip element finit (Finite Element Method – F.E.M.), în scopul validării rezultatelor astfel obținute.

### 2. TRATARE ANALITICĂ

Se consideră o structura spațială încastrată la ambele extremități, structură încărcată normal pe planul său, schema de încărcare fiind reprezentată de o sarcină concentrată P; sunt luate în considerare trei variante de alcătuire geometrică a sistemului spațial în discuție (fig.1a).

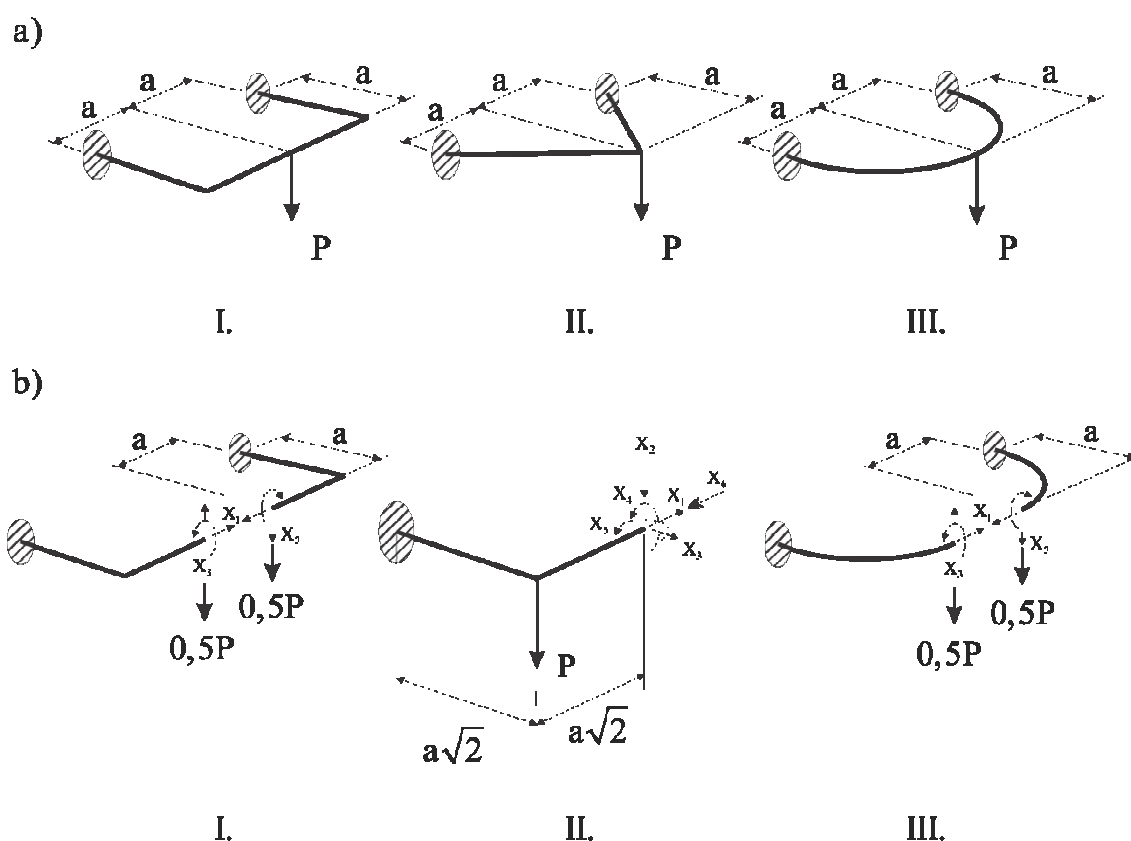


Fig.1

Problema cere stabilirea variantei constructive de rigiditate maximă, criteriul de performanță indicat fiind proiecția pe verticală a deplasării punctului de aplicație a sarcinii concentrate  $P$ .

Toate variantele constructive constituie probleme static nedeterminate, metoda aleasă de ridicare a nedeterminării fiind cea a eforturilor [1, 4, 7]. Pentru variantele constructive I și III a fost utilizată prezența axei de simetrie în alegerea formei de bază (cu simplificările de calcul aferente), pentru varianta II fiind aleasă, spre comparație, o formă de bază oarecare (fig.1b). Pentru calculul termenilor caracteristici s-au utilizat termenii din moment încovoietor, respectiv moment de torsiune din relația Maxwell-Mohr (cazul sistemelor spațiale).

Astfel, după ridicarea nedeterminării în cazul variantei de lucru I, se obțin diagramele de efort din figura 2, pentru simplificare fiind reprezentate doar diagramele de moment ce intervin în calcul.

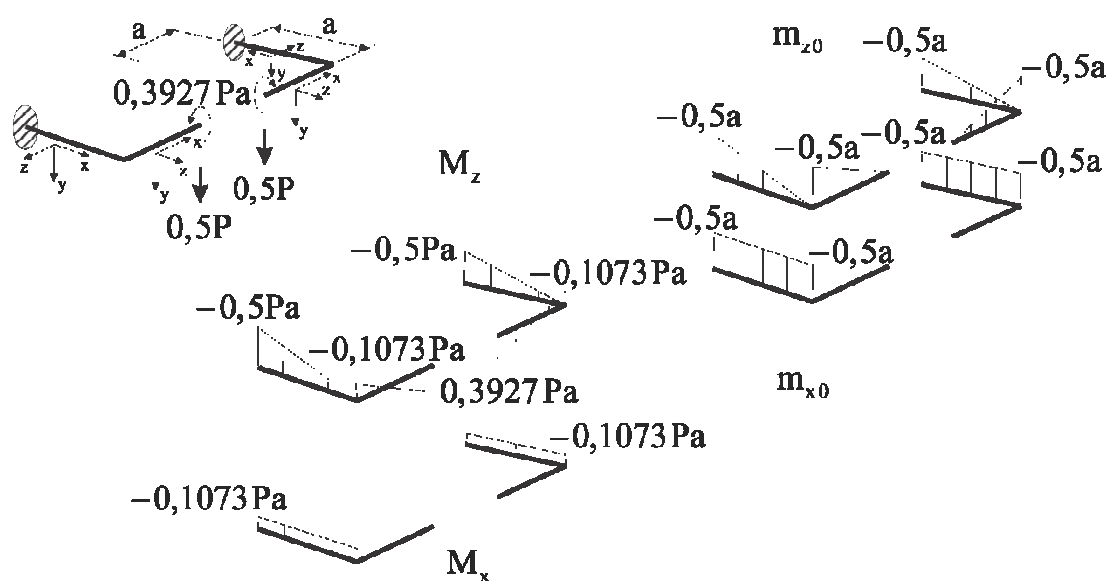


Fig.2

Se ajunge la expresia deplasării dorite:

$$v_P^I = \frac{1}{EI_{ax}} \int M_z m_{z0} ds + \frac{1}{GI_t} \int M_x m_{x0} ds ; \quad (1.1)$$

$$v_P^I = Pa^3 \left( \frac{1,37 \cdot 10^{-1}}{EI_{ax}} + \frac{1,073 \cdot 10^{-1}}{GI_t} \right).$$

Pentru varianta constructivă II, diagramele finale de efort (de interes) sunt reprezentate în figura 3, expresia deplasării pe verticală punctului de aplicație al forței P fiind:

$$v_P^{II} = \frac{1}{EI_{ax}} \int M_z m_{z0} ds ; \quad (1.2)$$

$$v_P^{II} = Pq^3 \frac{1,1292 \cdot 10^{-1}}{EI_{ax}} = Pa^3 \frac{3,194 \cdot 10^{-1}}{EI_{ax}}.$$

Expresia (1.2) include efectul momentului de torsiune asupra structurii; absența fizică a acestui termen se explică printr-un artificiu de calcul utilizat în scopul simplificării (mod particular de alegere și încărcare a formei de bază pentru trasarea diagramele de moment – vezi fig.3).

În cazul celei de-a treia variante, valoarea criteriului de comparație se stabilește cu expresiile momentelor din figura 4, formula finală fiind de forma:

$$v_P^{III} = \frac{1}{EI_{ax}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_z m_{z0} ds + \frac{1}{GI_t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x m_{x0} ds ; \quad (1.3)$$

$$v_P^{III} = Pa^3 \left( \frac{2,3354 \cdot 10^{-1}}{EI_{ax}} + \frac{1,8942 \cdot 10^{-2}}{GI_t} \right).$$

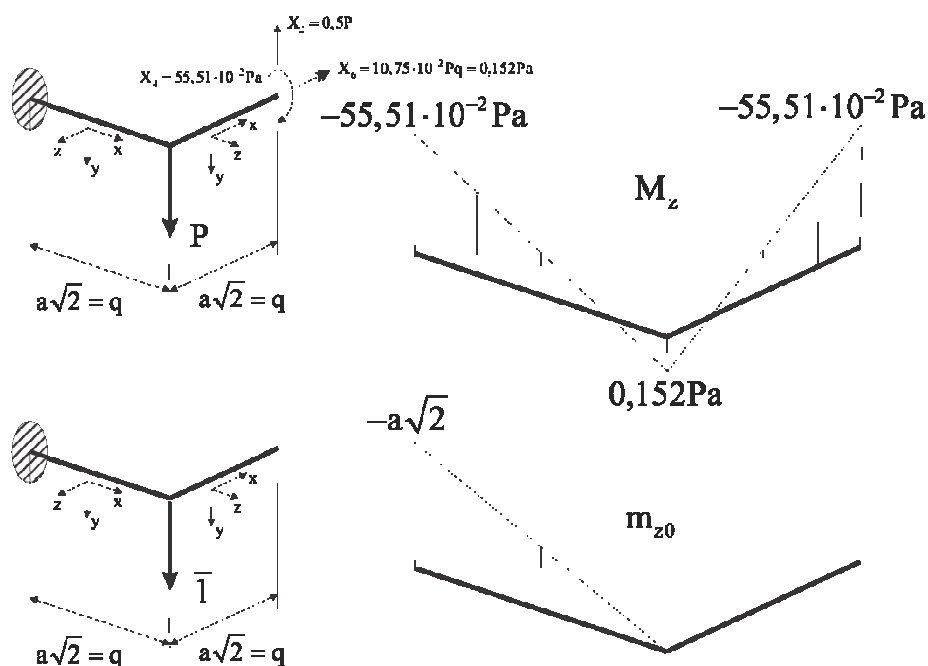


Fig.3

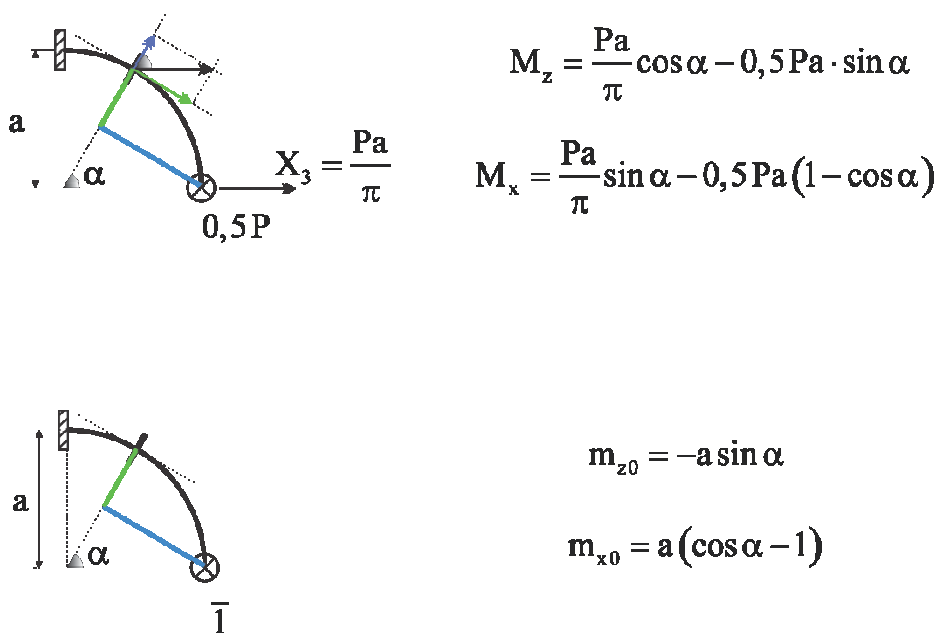


Fig.4

Pentru a se putea stabili cantitativ ordinul de mărime al parametrilor  $v_P$  astfel determinați se utilizează exemplul numeric:  $P = 5kN$ ,  $a = 1m$ , material oțel S235 de constante elastice  $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$ ,  $G = 7,9 \cdot 10^4 MPa$ , secțiune de formă circulară plină de diametru  $d = 60mm$ . După prelucrări, se obțin valorile:

$$v_p^I = \frac{Pa^3}{EI_{ax}} \cdot 2,7961 \cdot 10^{-1} \Rightarrow v_p^I = 10,464\text{mm};$$

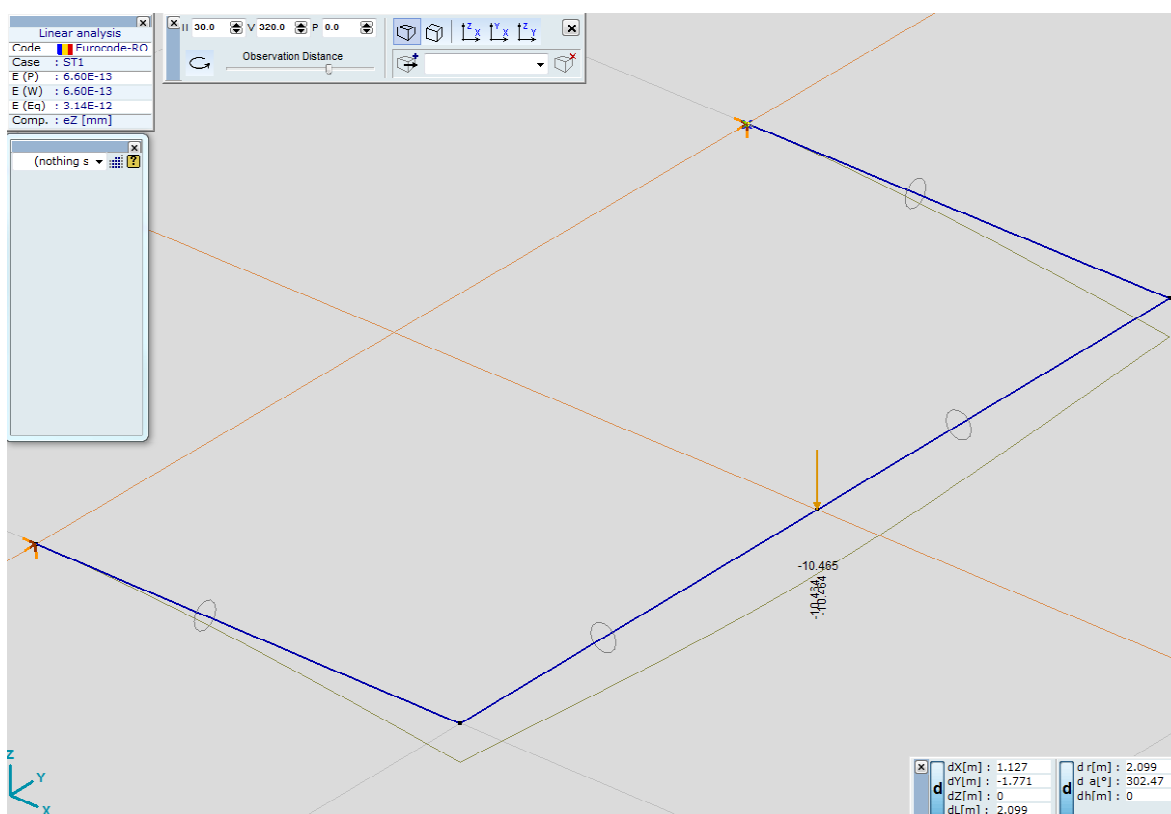
$$v_p^{II} = \frac{Pa^3}{EI_{ax}} \cdot 3,194 \cdot 10^{-1} \Rightarrow v_p^{II} = 11,95\text{mm};$$

$$v_p^{III} = \frac{Pa^3}{EI_{ax}} \cdot 2,5872 \cdot 10^{-1} \Rightarrow v_p^{III} = 9,683\text{mm}.$$
(1.4)

### 3. TRATAREA PROBLEMEI CU METODE NUMERICE

În ceea ce privește utilizarea metodei F.E.M. s-a utilizat aplicația software AxisVM11 LT Version, program de calcul ce întrebuințează metoda elementului finit pentru evaluarea stării de tensiune și deformație la nivelul unei structuri oarecare (static determinată sau nu). Varianta utilizată are drept limitări un număr maxim de 40 de elemente structurale, 400 de elemente de suprafață, 20 de variante de încărcare și nu mai mult de 10 moduri proprii de oscilație.

Se obțin astfel, rezultatele prezentate în figura 5:



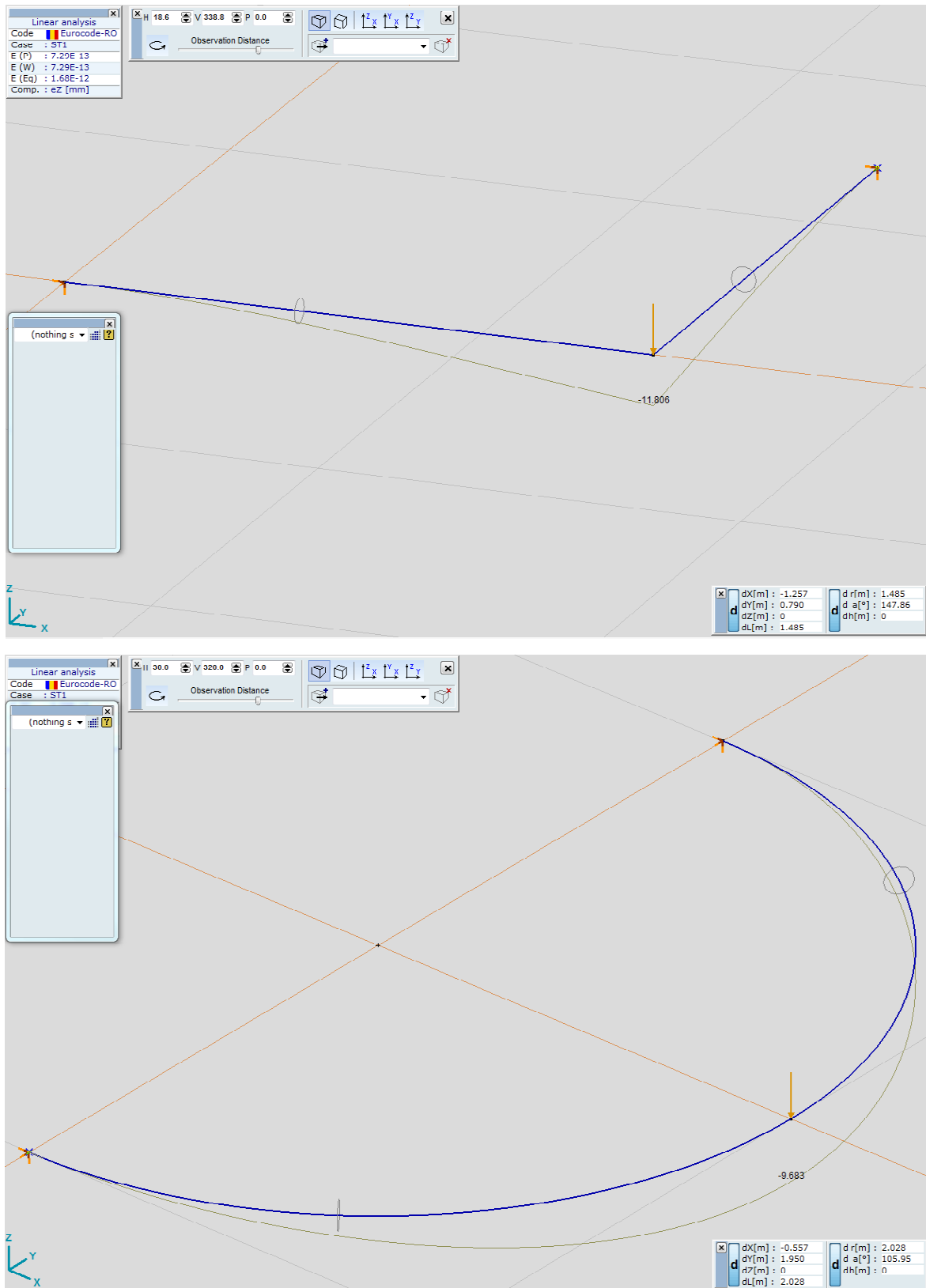


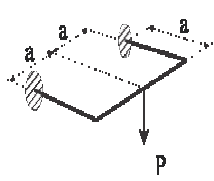
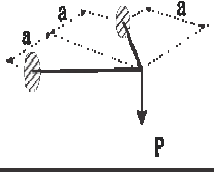
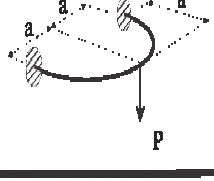
Fig.5

#### 4. CONCLUZII

Este de remarcat gradul de convergență al rezultatelor, atât din punctul de vedere a legii de variație și a confirmării legii dualității tensiunilor tangențiale, cât și prin prisma valorilor cantitative furnizate de sub-rutina solverului utilizat; o prezentare sintetică comparată a mărimilor de ieșire obținute prin diverse variante de lucru poate fi urmărită în tabelul I; pentru întregirea gamei de metode de lucru, au fost adăugate rezultatele obținute cu ajutorul unei suite de calcul de vârf, fiind remarcată apropierea valorilor mărimilor de ieșire.

Tabelul I

Tabel comparativ

Varianta	calcul	AxisVM	Solidworks (tip discretizare)	Feodosiev	calcul literal
	10,464mm	10,465mm	10,49mm (beam) 10,39mm (solid)	$\frac{Pa^3}{3EI_x}$ ; caz particular: $\frac{Pa^3}{EI_x} \cdot 3,3333 \cdot 10^{-1}$	$Pa^3 \left( \frac{1,37 \cdot 10^{-1}}{EI_x} + \frac{1,073 \cdot 10^{-1}}{GI_t} \right)$ ; caz particular: $\frac{Pa^3}{EI_x} \cdot 2,7961 \cdot 10^{-1}$
	11,95mm	11,912mm	11,98mm (beam) 11,61mm (solid)	$\frac{Pa^3 \sqrt{2}}{4} \left( \frac{1}{3EI_x} + \frac{1}{GI_t} \right)$ ; caz particular: $\frac{Pa^3}{EI_x} \cdot 5,878 \cdot 10^{-1}$	$\frac{Pa^3}{EI_x} \cdot 3,194 \cdot 10^{-1}$
	9,683mm	9,683mm	9,8mm (beam) 9,672mm (solid)	$\frac{Pa^3}{2} \left( \frac{\pi-1}{EI_x} + \frac{\pi-3}{GI_t} \right)$ ; caz particular: $\frac{Pa^3}{EI_x} \cdot 3,795 \cdot 10^{-1}$	$Pa^3 \left( \frac{2,3354 \cdot 10^{-1}}{EI_x} + \frac{1,8942 \cdot 10^{-1}}{GI_t} \right)$ ; caz particular: $\frac{Pa^3}{EI_x} \cdot 2,5872 \cdot 10^{-1}$

În ciuda simplității aparente, problema de mai sus confirmă studiile clasice existente, tratarea prin comparație constituind în același timp și un mijloc de validare a diverselor soluții numerice de calcul apărute.

**BIBLIOGRAFIE**

- [1] **Deutsch I.** , „*Rezistența materialelor*”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [2] **Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.**, „*Rezistența materialelor*”, vol.II, Institutul de Construcții București, 1981.
- [3] **Feodosiev V.I.**, „*Selected problems and questions in Strength of Materials*”, MIR Publishers Moscow, 1977.
- [4] **Luzin N.N.** , „*Calcul diferențial*”, Editura Tehnică, București, 1954.
- [5] **Vigodski M.**, „*Mathematical Handbook*”, MIR Publishers Moscow, 1975.
- [6] **Popov E.P.**, „*Mechanics of Materials*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [7] **Andreescu I., Mocanu Șt.** , „*Compendiu de Rezistența Materialelor*”, Matrix Rom, București, 2005.
- [8] \*\*\* COSMOS/M – Finite Element System, User Guide, 1995.