

CONTROLUL VIBRAȚIILOR STRUCTURILOR ELASTICE, SIMPLE, ÎN BUCLA DESCHISĂ

THE CONTROL OF SIMPLE ELASTIC VIBRATION STRUCTURES IN OPEN LOOP

Ion BALCU¹, Gabriel DIMA², Camelia SCHIOPU³

¹Universitatea Transilvania
B-dul Eroilor nr.29, 500036 Brașov, Romania
E-mail: balcu@unitbv.ro

²Universitatea Transilvania
B-dul Eroilor nr.29, 500036 Brașov, Romania
E-mail: dima_gabriel@yahoo.com

³Universitatea Transilvania
B-dul Eroilor nr.29, 500036 Brașov, Romania
E-mail: camelia.s@unitbv.ro

Rezumat. În lucrare se prezintă suportul teoretic al metodei de control al vibrațiilor aplicabilă la structuri elastice cu parametrii distribuiți, cu referire directă la bara elastică încastrată la un capăt, supusă vibrațiilor longitudinale.

Cuvinte cheie: vibrații mecanice, controlul vibrațiilor, control activ, parametrii distribuiți, amortizarea vibrațiilor

Abstract. The paper presents the theoretical support of vibration control method applicable to elastic structures with distributed parameters, with direct reference to embedded elastic bar at one end, subjected to longitudinal vibrations..

Keywords: mechanical vibration, vibration control, activ control, distributed parameters, vibration damping

1. INTRODUCERE

Prin acest concept se consideră că sistemului i se transferă energie suplimentară datorită unor forțe suplimentare, de control, care acționează asupra acestuia. Comparând această metodă cu cea a absorbitorului pasiv de vibrație, se observă că un sistem activ de control poate elimina în totalitate vibrația structurii în anumite regiuni ale sale.

Utilizând absorbitori pasivi, vibrațiile se pot reduce dar nu se pot elimina complet. Mai mult, în cazul absorbitorilor pasivi, aceștia pot intra în vibrație deoarece energia vibratorie este transmisă de la sistemul principal la absorbitori.

2. PREZENTAREA METODEI

În figura 1 este prezentată bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt, asupra căreia se aplică o forță sinusoidală $F(t) = F_0 \sin \omega t$.

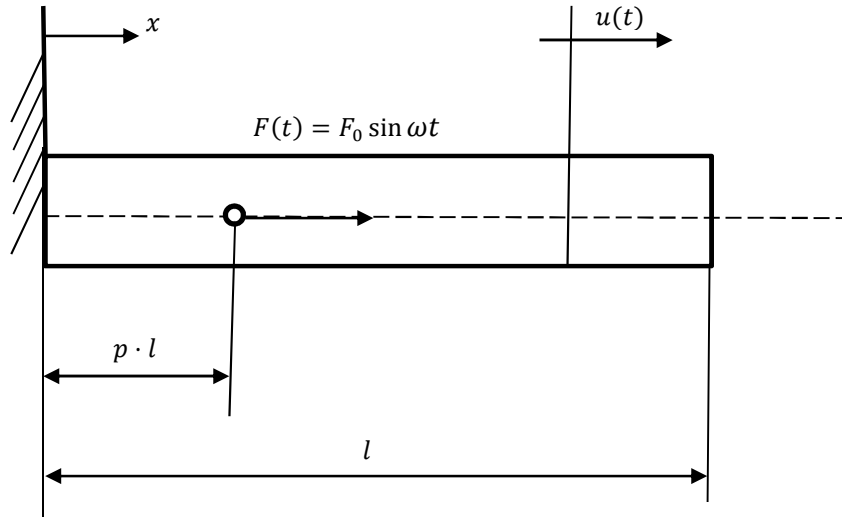


Fig. 1

Pe desen s-au făcut următoarele notații:

- l este lungimea barei;
- $p \cdot l$ ($0 < p < 1$) este distanța de la punctul de aplicare al forței până la încastrare;
- x este coordonata în lungul axei barei;
- $u(t)$ este deplasarea instantanee a vibrației longitudinale;
- $F(t)$ – forța excitatoare;
- F_0 – amplitudinea forței excitatoare;
- ω - pulsația forței excitatoare;
- t - timpul.

Ecuatiile undei sunt:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq pl \quad (1)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad pl \leq x \leq l \quad (2)$$

În ecuațiile (1) și (2) c reprezintă viteza de propagare a undei în bară și este dată de relația: $c^2 = E/\rho$, în care E este modulul de elasticitate al lui Young, iar ρ este densitatea materialului.

Soluțiile ecuațiilor diferențiale (1) și (2) sunt de forma [2], [3]:

$$u_1(x, t) = \left(C_{11} \sin \frac{\omega x}{c} + C_{12} \cos \frac{\omega x}{c} \right) \sin \omega t; \quad (3)$$

$$u_2(x, t) = \left(C_{21} \sin \frac{\omega x}{c} + C_{22} \cos \frac{\omega x}{c} \right) \sin \omega t, \quad (4)$$

unde $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ sunt constante de integrare care se determină din condițiile pe contur și de continuitate.

Condițiile pe contur sunt:

$$u_1(x, t)|_{x=0} = 0; \quad (5)$$

$$AE \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (6)$$

unde A este aria secțiunii transversale a barei.

Condiția (5) arată că deplasarea secțiunii transversale a barei în capătul din stânga trebuie să fie zero, în timp ce condiția (6) impune ca forța în capătul liber să fie zero.

Condițiile de continuitate sunt:

$$u_1(x, t)|_{x=pl} = u_2(x, t)|_{x=pl} \quad (7)$$

$$AE \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=pl} - AE \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=pl} + F_0 \sin \omega t = 0 \quad (8)$$

Condițiile (5), (6), (7) și (8) sunt echivalente cu următorul sistem liniar de ecuații ($C_{12} = 0$):

$$\begin{bmatrix} 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin p\alpha & -\sin p\alpha & -\cos p\alpha \\ -\cos p\alpha & \cos p\alpha & -\sin p\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{F_0 c}{AE \omega} \end{bmatrix} \quad (9)$$

unde α este un parametru dat de relația:

$$\alpha = \frac{\omega l}{c}.$$

Rezolvând sistemul de ecuații liniare (9), pentru C_{11}, C_{21} și C_{22} determinați și înlocuiți în ecuațiile (3) și (4) se obțin:

$$u_1(x, t) = RF_0 \cos(1-p)\alpha \cdot \sin \alpha \frac{x}{l} \cdot \sin \omega t; \quad 0 \leq \frac{x}{l} \leq p; \quad (10)$$

$$u_2(x, t) = RF_0 \sin p\alpha \cdot \cos \left(1 - \frac{x}{l}\right) \alpha \cdot \sin \omega t; \quad p \leq \frac{x}{l} \leq 1, \quad (11)$$

unde s-a notat:

$$R = \frac{c}{AE \cos \alpha}. \quad (12)$$

Din expresia lui R se constată că atunci când: $\alpha = \left(\frac{1}{2} + n\right) \pi$ ($pt. n = 0, 1, 2 \dots$) $\cos \alpha$ devine egal cu zero și amplitudinile vibrațiilor se apropie de infinit. Aceste valori ale lui α corespund pulsațiilor proprii ale barei.

Dacă alte două forte $F_1(t) = F_{10} \sin \omega t$ și $F_2(t) = F_{20} \sin \omega t$ sunt aplicate barei (Fig. 2) sistemul fiind liniar, se poate aplica principiul suprapunerii de efecte, vibrațiile rezultate se pot exprima prin relația:

$$u(x, t) = U(x) \sin \omega t \quad (13)$$

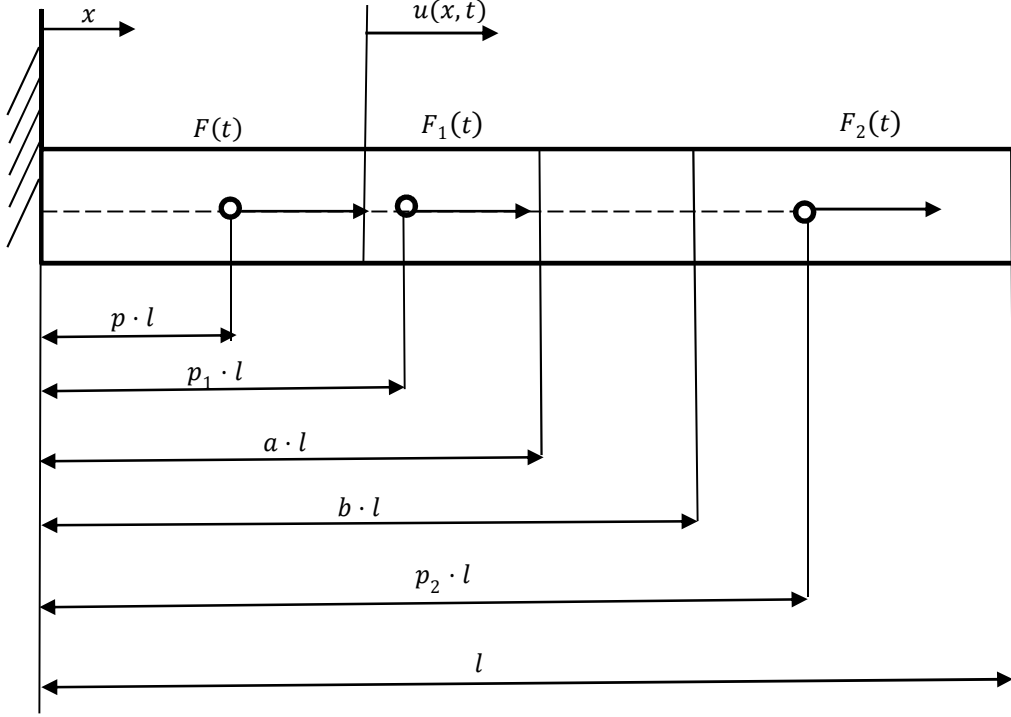


Fig. 2

unde:

$$U(x) = R(F_0 \cos(1 - p)\alpha + F_{10} \cos(1 - p_1)\alpha + F_{20} \cos(1 - p_2)\alpha) \sin \alpha \frac{x}{l}, \quad (14)$$

$$0 \leq \frac{x}{l} \leq p$$

$$U(x) = R \left\{ F_0 \sin p\alpha \cdot \cos \left(1 - \frac{x}{l} \right) \alpha + [F_{10} \cos(1 - p_1)\alpha + F_{20} \cos(1 - p_2)\alpha] \sin \alpha \frac{x}{l} \right\}, \quad (15)$$

$$p \leq \frac{x}{l} \leq p_1$$

$$U(x) = R \left[(F_0 \sin p\alpha + F_{10} \sin p_1\alpha) \cos \left(1 - \frac{x}{l} \right) \alpha + F_{20} \cos(1 - p_2)\alpha \sin \alpha \frac{x}{l} \right], \quad (16)$$

$$p_1 \leq \frac{x}{l} \leq p_2$$

$$U(x) = R(F_0 \sin p\alpha + F_{10} \sin p_1\alpha + F_{20} \sin p_2\alpha) \cos \left(1 - \frac{x}{l} \right) \alpha, \quad (17)$$

$$p_2 \leq \frac{x}{l} \leq 1$$

3. FORMULAREA PROBLEMEI DE CONTROL AL VIBRAȚIILOR

Ne propunem să determinăm amplitudinile forțelor de control $F_1(t)$ și $F_2(t)$ precum și poziția lor indicată de p_1 și p_2 , astfel încât, pe un anumit interval cuprins între al și bl , valoarea amplitudinii vibrațiilor să fie minimă (Fig. 2).

Funcția obiectiv poate fi scrisă sub forma:

$$J(F_{10}, F_{20}, p_1, p_2) = \int_{al}^{bl} U^2(x) dx \quad (18)$$

Conform relațiilor (14÷17) amplitudinea vibrației $U(x)$ este o funcție armonică care ia valori pozitive și negative de aceea se va folosi U^2 în definirea criteriului de performanță J . Prin urmare, energia sistemului în acest interval, este minimizată.

După un calcul laborios se obține, pentru J , forma [1], [3]:

$$J = lR^2(a_1 F_{10}^2 + a_2 F_{10} F_{20} + a_3 F_{20}^2 + a_4 F_{10} + a_5 F_{20} + a_6), \quad (19)$$

unde:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left[b - a + \frac{1}{2\alpha} (\sin 2(1-a)\alpha - \sin 2(1-b)\alpha) \right] \sin^2 p_1 \alpha, \quad (20)$$

$$a_2 = \left[(b-a) \sin \alpha + \frac{1}{2\alpha} (\cos(1-2a)\alpha - \cos(1-2b)\alpha) \right] \sin p_1 \alpha \cdot \cos(1-p_2)\alpha, \quad (21)$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left[b - a + \frac{1}{2\alpha} (\sin 2a\alpha - \sin 2b\alpha) \right] \cos^2(1-p_2)\alpha \quad (22)$$

$$a_4 = \left[b - a + \frac{1}{2\alpha} (\sin 2(1-a)\alpha - \sin 2(1-b)\alpha) \right] F_0 \sin p\alpha \cdot \sin p_1 \alpha \quad (23)$$

$$a_5 = \left[(b-a) \sin \alpha + \frac{1}{2\alpha} (\cos(1-2a)\alpha - \cos(1-2b)\alpha) \right] F_0 \sin p\alpha \cdot \cos(1-p_2)\alpha \quad (24)$$

$$a_6 = \frac{1}{2} \left[b - a + \frac{1}{2\alpha} (\sin 2(1-a)\alpha - \sin(1-b)\alpha) \right] F_0^2 \sin^2 p\alpha. \quad (25)$$

În expresia lui J , termenul lR^2 este o constantă și ca urmare acest termen nu se ia în considerație în procesul de optimizare.

În procesul de optimizare trebuiesc luate în considerație și următoarele restricții:

$$\begin{aligned} p &\leq p_1 \leq a; \\ b &\leq p_2 \leq l \\ F_0^i &\leq F_{10}, F_{20} \leq F_0^s. \end{aligned} \quad (26)$$

În relațiile (26) F_0^i și F_0^s reprezintă limita inferioară și superioară a amplitudinii forțelor de control.

4. CONCLUZII

Metoda prezentată se poate aplica la sisteme elastice cu parametrii distribuiți. Din punct de vedere practic determinarea funcției obiectiv poate deveni complicată pentru structuri mai complexe. Mai mult, problema de optimizare trebuie rezolvată pentru fiecare poziție a forței excitatoare. În sisteme perturbațiile pot fi aplicate oriunde și în mod aleatoriu. În astfel de situații vibrația care apare, este în mod obișnuit controlată, prin forțele date de generatorul de forțe comandat de reacția de feedback.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Chiriacescu, T.S., "Optimal Control and Optimisation of the Time Invariant Linear Mechanical Systems.", Vibration in Mechanical Engineering, Timișoara, 1985.
- [2] Chiriacescu, T.S., "Sisteme mecanice liniare. O introducere.", Ed. Academiei Române, București, 2007.
- [3] Chiriacescu, T.S., "Sisteme pentru controlul activ al vibrațiilor mecanice", Contract de cercetare științifică, Brașov, 1993.
- [4] Ebrahimi, N. D., "Open Loop Vibration Control of Elastic Structural Elements", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 16, 1987.
- [5] Precemant, A., "Vibration Control of Active Structures. An introduction 2nd edition", Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands, 202.