

CONSIDERAȚII PRIVIND INTERACȚIUNEA DINTRE DOUĂ ROȚI ȘI O ȘINĂ

ON TWO WHEELS/RAIL INTERACTION

Traian MAZILU

Universitatea Politehnică din București
Splaiul Independenței nr. 313, sector 6, CP 060042, București, Romania
e-mail: trmazilu@yahoo.com

Rezumat. În lucrare este analizat răspunsul dinamic al unui tandem de roți care rulează cu viteze diferite pe o șină cu neregularitate sinusoidală. Sistemul prezintă două viteze de rezonanță, dar în situația în care ampatamentul este multiplu întreg al semi-lungimii de undă a neregularității șinei, sistemul va avea o singură viteză de rezonanță. Forța de contact scade în general o dată cu mărirea ampatamentului însă această scădere nu este uniformă.

Cuvinte cheie: roată, șină, vibrație, răspuns dinamic, ampatament

Abstract. In this paper, the dynamic response of a wheel tandem rolling on a rail with sinusoidal irregularity at different speeds is analysed. System has two resonance speeds, but when the wheel base is integer multiple of semi-wavelength of the rail irregularity, the system has only one resonance speed. Contact force has non uniform decrease when the wheel base increases.

Keywords: wheel, rail, vibration, dynamic response, wheel base

1. INTRODUCERE

Problema interacțiunii roată-șină este importantă din mai multe puncte de vedere practice cum ar fi, de exemplu, producerea zgomotului de rulare [1, 2], uzura suprafețelor de rulare [3, 4], solicitările suprastructurii căii și a aparatului de rulare al vehiculului, transmiterea vibrațiilor prin solul din vecinătatea căii ferate la construcțiile civile [5, 6] etc.

În cele mai multe tratări teoretice, se consideră simetria structurală a vehiculului și a căii de rulare, precum și decuplarea vibrațiilor șinelor și a roților atât prin șină, cât și prin elementele de suspensie, astfel încât problema se reduce la tratarea interacțiunii dintre o roată și șina pe care aceasta rulează [7, 8]. Cu toate acestea, aspecte noi pot fi puse în lumină dacă se consideră cuplarea roților datorită undelor de încovoiere care se propagă prin șină [9, 10].

În această lucrare, se adoptă un model simplu reprezentând două roți care rulează pe o șină infinită rezemată pe o fundație cu două etaje elastice pentru a investiga o serie de aspecte legate de răspunsul în frecvență al sistemului. Este analizat cazul neamortizat și sunt puse în evidență vitezele de rezonanță, precum și viteza de antirezonanță. De asemenea, este analizat răspunsul în frecvență în funcție de distanța dintre roți (ampatament) în cazul modelului cu amortizare.

2. MODELUL MECANIC ȘI ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Se consideră cazul a două roți ale unui vehicul feroviar distanțate cu D care rulează fără alunecare cu viteza constantă V de-a lungul unei șine cu neregularități pe suprafața de rulare (fig. 1).

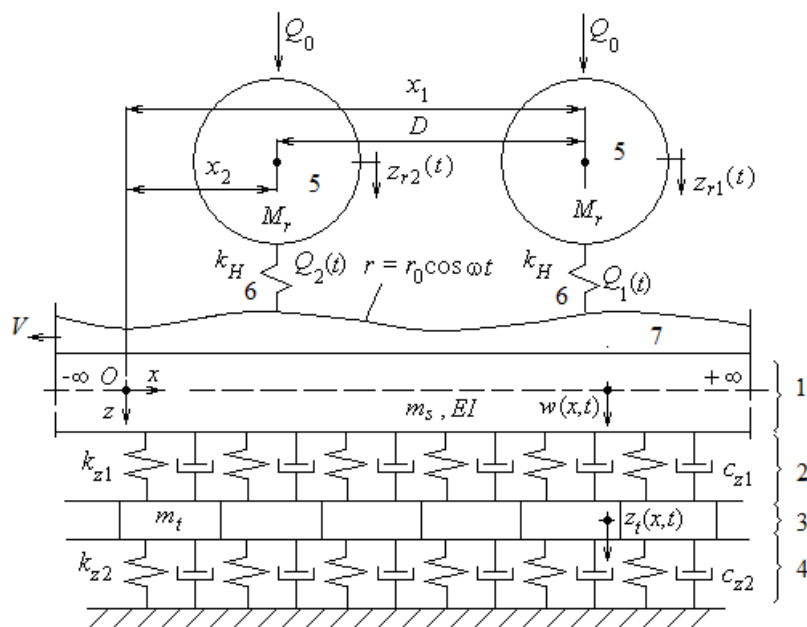


Fig. 1. Modelul de interacțiune dintre două roți și o șină:

1. șina; 2. suportul de șină; 3. traversele; 4. balastul; 5. roțile;
6. contactul elastic; 7. bandă profilată.

Modelul căii este alcătuit dintr-o grindă infinită uniformă Euler-Bernoulli, reprezentând șina, așezată pe o fundație continuă cu două etaje elastice cu caracteristici vâsco-elastice liniare și un strat inerțial intermediar care modelează elasticitatea suporturilor de șină și a balastului, respectiv efectul inerțial al traverselor. Acest tip de model neglijează efectul rezemării șinei pe traversele căii pozate echidistant și de aceea poate fi folosit cu rezultate bune numai până la cca. 600 Hz pentru simularea numerică a răspunsului căii clasice cu traverse de beton [11]. Parametrii modelului căii sunt după cum urmează: masa liniară a șinei m_s , modulul de încovoiere EI , unde E este modulul de elasticitate longitudinal și I este momentul de inerție al secțiunii transversale a șinei, masa liniară a stratului inerțial al traverselor m_t , constanta elastică pe unitatea de lungime a stratului elastic al suportului de șină k_{z1} , constanta elastică pe unitatea de lungime a stratului elastic al balastului k_{z2} și constantele de amortizare pe unitatea de lungime c_{z1} și c_{z2} . Masa liniară m_t se calculează prin repartizarea masei unei semitraverse la distanța dintre traverse. În mod asemănător se calculează și parametrii celor două etaje elastice.

Roțile sunt identice, de masă M_r , cu suprafețele de rulare netede și sunt încărcate cu sarcina statică Q_0 .

Pentru simplitate, se adoptă ca model de interacțiune roată-șină modelul deplasării neregularităților suprafeței de rulare a șinei. Aceasta înseamnă că roțile sunt suspendate deasupra șinei, iar printre suprafețele de rulare este trasă în sens contrar sensului de deplasare a roților de-a lungul căii o bandă profilată corespunzător profilului neregularităților suprafeței

de rulare a șinei. Adoptarea acestui model de interacțiune poate fi justificată în cazul în care viteza de deplasare a roților este mult mai mică decât viteza de propagare a undelor de încovoiere prin șină, respectiv când este posibilă neglijarea influenței efectului Doppler asupra răspunsului șinei.

În aceste condiții, mișcarea este raportată la sistemul de referință inerțial Oxz care fixează poziția de echilibru sub sarcinile statice datorate celor două roți. La un moment oarecare t , într-o secțiune de abscisă x , deplasarea grinzii Euler-Bernoulli (șina) este $w(x, t)$, iar cea a stratului inerțial (traversele) este $z_i(x, t)$. Pozițiile celor două roți sunt date de coordonatele $z_{r1}(t)$ și $z_{r2}(t)$.

Neregularitatea suprafeței de rulare a șinei (rugozitatea) este r și aceasta depinde de poziția secțiunii x de-a lungul căii. Când roțile se deplasează cu viteza V , în dreptul primei roți, rugozitatea este $r(x_1) = r(Vt)$, iar în dreptul celei de a doua roți se înregistrează rugozitatea $r(x_2) = r(Vt - D)$.

Presupunând că forțele dinamice dintre roți și șină sunt mici în comparație cu sarcină statică, se poate considera contactul dintre roți și șină ca fiind de tip Hertzian liniarizat, cu k_H - rigiditatea contactului.

Aplicând legile dinamicii, se pot scrie ecuațiile de mișcare în raport cu pozițiile de echilibru sub sarcinile statice.

Ecuațiile de mișcare ale căii sunt:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_{z1} \frac{\partial(w - z_t)}{\partial t} + k_{z1}(w - z_t) = \sum_{i=1}^2 \Delta Q_i \delta(x - x_i), \quad (1)$$

$$m_t \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2} + (c_{z1} + c_{z2}) \frac{\partial z_t}{\partial t} + (k_{z1} + k_{z2}) z_t - c_{z1} \frac{\partial w}{\partial t} - k_{z1} w = 0. \quad (2)$$

în care $\Delta Q_{1,2} = \Delta Q_{1,2}(t)$ sarcinile dinamice. Condițiile la limită (la $\pm \infty$) sunt nule.

Ecuația de mișcare a roții $i = 1 \div 2$ este:

$$M_r \ddot{z}_{ri} = -\Delta Q_i. \quad (3)$$

În fine, ecuația contactului elastic dintre roata i și șină este

$$z_{ri}(t) - w(x_i, t) - r(x_i) = \Delta Q_i / k_H. \quad (4)$$

În cele ce urmează, interesează numai regimul permanent armonic în care neregularitatea suprafeței de rulare a șinei poate fi descrisă utilizând numerele complexe

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \exp(ikx) = \bar{r}_0 \exp(ikVt) = \bar{r}_0 \exp(i\omega t) \quad (5)$$

în care \bar{r}_0 este amplitudinea complexă a rugozității, k este numărul de undă al rugozității, iar ω este pulsația.

Considerând faza inițială nulă în dreptul primei roți, atunci rugozitatea în dreptul celor două roți va fi

$$\bar{r}_1 = \bar{r}(x_1) = r_0 \exp(i\omega t), \quad \bar{r}_2 = \bar{r}(x_2) = r_0 \exp[i\omega(t - D/V)] = \bar{r}_1 \exp(-i\omega D/V). \quad (6)$$

S-a presupus că cele două roți trec peste aceleași rugozități, iar roata a doua face acest lucru cu o întârziere egală cu D/V față de prima roată. Aceasta este valabil dacă se neglijează influența rugozității proprii a roții.

Celelalte mărimi ale regimului armonic permanent sunt de forma (5)

$$\bar{z}_{r,1,2}(t) = \bar{z}_{r,1,2} \exp(i\omega t), \quad \bar{w}(x,t) = \bar{w}(x) \exp(i\omega t), \quad (7)$$

$$\bar{\delta}_{1,2}(t) = \bar{\delta}_{1,2} \exp(i\omega t), \quad \Delta \bar{Q}_{1,2}(t) = \Delta \bar{Q}_{1,2} \exp(i\omega t). \quad (8)$$

În regim armonic permanent deplasarea verticală a șinei în dreptul roții $i = 1,2$ se poate calcula cu ajutorul funcției Green

$$\bar{w}_i = \bar{w}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x_i, \xi) \sum_{k=1}^2 \Delta \bar{Q}_k \delta(\xi - x_k) d\xi = G(x_i, x_1) \Delta \bar{Q}_1 + G(x_i, x_2) \Delta \bar{Q}_2. \quad (9)$$

Expresia funcției Green este de forma [11]

$$G(x, \xi) = -\frac{\exp[-(a_1 - ia_2)|x - \xi|] + i \exp[-(a_2 + ia_1)|x - \xi|]}{4(a_1 - ia_2)^3 EI}, \quad (10)$$

în care

$$a_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\sqrt{p^2 + q^2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sqrt{p^2 + q^2} - p}}, \quad (11)$$

Parametrii p și q se calculează cu relațiile

$$p = \beta_z^4 \frac{A_{z1}A_{z2} + B_{z1}B_{z2}}{A_{z2}^2 + B_{z2}^2} \quad q = \beta_z^4 \frac{A_{z2}B_{z1} - A_{z1}B_{z2}}{A_{z2}^2 + B_{z2}^2} \quad (12)$$

unde

$$\beta_z = \sqrt[4]{\frac{m_s \omega^2}{EI}}, \quad (13)$$

$$A_{z1} = (\omega_{z1}^2 / \omega^2 - 1)(\omega_{zII}^2 / \omega^2 - 1) - 4\zeta_{z1}\zeta_{z2}\omega_{z1}\omega_{z2} / \omega^2, \quad (14)$$

$$A_{z2} = (\mu\omega_{z1}^2 + \omega_{z2}^2) / \omega^2 - 1, \quad (15)$$

$$B_{z1} = 2[(\omega_{z2}^2 / \omega^2 - \mu - 1)\zeta_{z1}\omega_{z1} / \omega + (\omega_{z1}^2 / \omega^2 - 1)\zeta_{z2}\omega_{z2} / \omega], \quad (16)$$

$$B_{z2} = 2(\zeta_{z2}\omega_{z2} + \mu\zeta_{z1}\omega_{z1}) / \omega \quad (17)$$

cu

$$\omega_{z1}^2 = k_{z1} / m_s, \quad \omega_{z2}^2 = k_{z2} / m_t, \quad (18)$$

$$\zeta_{z1} = c_{z1} / 2\sqrt{m_s k_{z1}}, \quad \zeta_{z2} = c_{z2} / 2\sqrt{m_t k_{z2}}, \quad (19)$$

$$\mu = m_s / m_t \quad (20)$$

și

$$\omega_{z1,II}^2 = \frac{1}{2} \left[(1 + \mu)\omega_{z1}^2 + \omega_{z2}^2 \mp \sqrt{[(1 + \mu)\omega_{z1}^2 + \omega_{z2}^2]^2 - 4\omega_{z1}^2\omega_{z2}^2} \right]. \quad (21)$$

Deplasarea roții i se obține din ecuația (3)

$$\bar{z}_{ri} = -\frac{1}{\omega^2 M_r} (-\Delta \bar{Q}_i) = -\bar{\alpha}_r \Delta \bar{Q}_i \quad (22)$$

în care s-a pus în evidență receptanța roții

$$\bar{\alpha}_r = -\frac{1}{\omega^2 M_r}. \quad (23)$$

Cu toate aceste deplasări introduse în ecuațiile contactului, rezultă

$$(\bar{\alpha}_r + \bar{\alpha}_s + \bar{\alpha}_H) \Delta \bar{Q}_1 + \bar{\alpha}_{sa} \Delta \bar{Q}_2 = -\bar{r}_1 \quad (24)$$

$$\bar{\alpha}_{sa} \Delta \bar{Q}_1 + (\bar{\alpha}_r + \bar{\alpha}_s + \bar{\alpha}_H) \Delta \bar{Q}_2 = -\bar{r}_2, \quad (25)$$

în care s-au notat următoarele

$$\bar{\alpha}_s = G(x_1, x_1) = G(x_2, x_2), \quad \bar{\alpha}_{sa} = G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1). \quad (26)$$

Trebuie să se remarce faptul că prima egalitate este adevărată datorită structurii omogene a căii, iar cea de a doua pe motiv de simetrie a funcției Green a șinei. Acum, utilizând rel. (10), avem

$$\bar{\alpha}_s = -\frac{1+i}{4(a_1 - ia_2)^3 EI} \quad (27)$$

$$\bar{\alpha}_{sa} = -\frac{\exp[-(a_1 - ia_2)D] + i \exp[-(a_2 + ia_1)D]}{4(a_1 - ia_2)^3 EI}. \quad (28)$$

Presupunând așadar cunoscute rugozitățile, rezultă forțele de contact roată-șină pentru cele două roți

$$\Delta\bar{Q}_1 = \frac{\bar{\alpha}_{rs}\bar{r}_1 + \bar{\alpha}_{sa}\bar{r}_2}{\bar{\alpha}_{rs}^2 - \bar{\alpha}_{sa}^2}, \quad \Delta\bar{Q}_2 = \frac{\bar{\alpha}_{sa}\bar{r}_1 + \bar{\alpha}_{rs}\bar{r}_2}{\bar{\alpha}_{rs}^2 - \bar{\alpha}_{sa}^2}. \quad (29)$$

în care s-a notat receptanța sistemului roată-șină sub forma

$$\bar{\alpha}_{rs} = -(\bar{\alpha}_r + \bar{\alpha}_s + \bar{\alpha}_H). \quad (30)$$

Ținând seama de defazajul dintre r_1 și r_2 , se pot defini funcțiile de răspuns ale forțelor dinamice de contact sub forma

$$\bar{H}_{\Delta Q1} = \frac{\Delta\bar{Q}_1}{\bar{r}_1} = \frac{\bar{\alpha}_{rs} + \bar{\alpha}_{sa} \exp(-i\omega D/V)}{\bar{\alpha}_{rs}^2 - \bar{\alpha}_{sa}^2} \quad (31)$$

$$H_{\Delta Q2} = \frac{\Delta\bar{Q}_2}{\bar{r}_2} = \frac{\bar{\alpha}_{sa} \exp(i\omega D/V) + \bar{\alpha}_{rs}}{\bar{\alpha}_{rs}^2 - \bar{\alpha}_{sa}^2} \quad (32)$$

Se observă faptul că dacă

$$\exp(-i\omega D/V) = \exp(i\omega D/V) = 1, \quad (33)$$

ceea ce revine la a spune că distanța dintre roți este multiplu par al semi-lungimii de undă $\Lambda = 2\pi V/\omega$ a neregularității suprafeței de rulare a șinei,

$$D = 2n \frac{\Lambda}{2}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (34)$$

atunci avem

$$\bar{H}_{\Delta Q1} = \bar{H}_{\Delta Q2} = \frac{1}{\bar{\alpha}_{rs} - \bar{\alpha}_{sa}}. \quad (35)$$

Dacă este îndeplinită condiția

$$\exp(-i\omega D/V) = \exp(i\omega D/V) = -1, \quad (36)$$

lucru care se întâmplă dacă distanța dintre roți este multiplu impar al semi-lungimii de undă a neregularității suprafeței de rulare

$$D = (2n-1) \frac{\Lambda}{2}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (37)$$

atunci avem

$$\bar{H}_{\Delta Q1} = \bar{H}_{\Delta Q2} = \frac{1}{\bar{\alpha}_{rs} + \bar{\alpha}_{sa}}. \quad (38).$$

Relațiile (31 - 32) arată că sistemul are două frecvențe de rezonanță. Dacă însă este îndeplinită una din condițiile (34) sau (37), sistemul va avea o singură frecvență de rezonanță, așa cum arată relațiile (35) și (38). Aceste aspecte vor fi puse în evidență și pe cale numerică în secțiunea următoare.

3. ANALIZA RĂSPUNSULUI

În această secțiune sunt prezentate o serie de rezultate obținute pe baza modelului descris anterior, al celor două roți care se deplasează fără alunecare pe șină. Parametrii modelului sunt: $m_s = 60 \text{ kg/m}$, $EI = 6,42 \text{ MN/m}^2$, $m_t = 242 \text{ kg/m}$, $k_{z1} = 467 \text{ MN/m}^2$, $k_{z2} = 200 \text{ MN/m}^2$, $M_r = 750 \text{ kg}$, $Q_o = 100 \text{ kN}$, $k_H = 1.6 \text{ GN/m}$. Parametrii modelului corespund unei căi clasice prevăzută cu șină UIC 60 pe traverse de beton de 290 kg/traversă , distanțate la 60 cm . Rigiditatea suportului de șină este de 280 MN/m , iar cea a balastului de 120 MN/m cu precizarea că ambele valori corespund unui capăt de traversă. Amortizarea căii se calculează în funcție de gradul de amortizare al celor două etaje elastice (rel. 19).

În primul rând ne interesează răspunsul șinei în regim armonic permanent, care este prezentat sub formă de receptanță a șinei calculată în punctul de aplicare a forței armonice (v. fig. 2). Răspunsul șinei pe suport elastic neamortizat prezintă două frecvențe de rezonanță la $128,4$ și respectiv $500,4 \text{ Hz}$ și o frecvență de anti-rezonanță la $264,3 \text{ Hz}$. Frecvențele de rezonanță pot fi calculate cu ajutorul rel. 21. Practic, calea de rulare se comportă ca un oscilator cu două grade de libertate care prezintă două frecvențe de rezonanță. Frecvența de anti-rezonanță este rezultatul efectului de absorbitor dinamic pe care îl dau traversele.

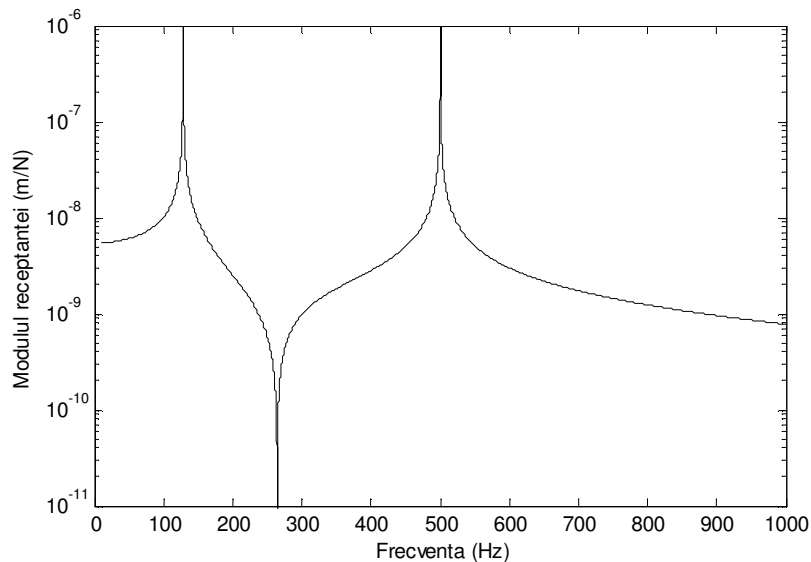


Fig. 2. Receptanța șinei în punctul de aplicare a forței armonice (fără amortizare).

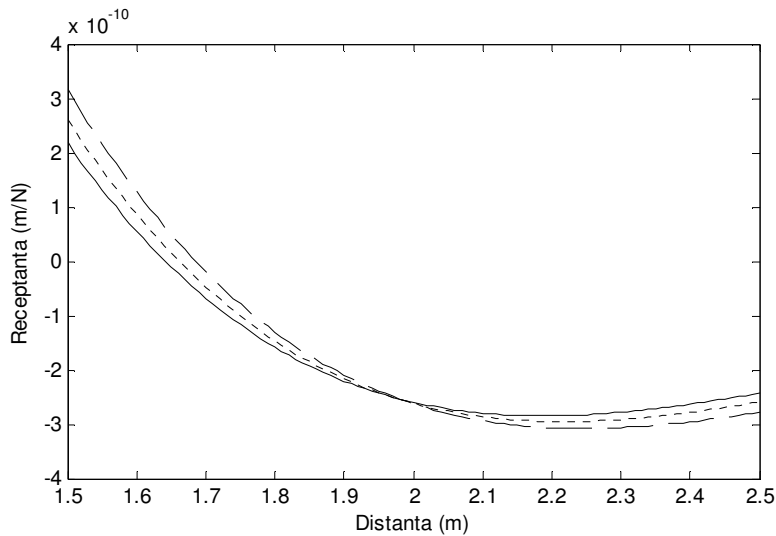


Fig. 3. Receptanța șinei de-a lungul căii (fără amortizare):
 —, la 65 Hz, ..., la 70 Hz, - - -, la 75 Hz.

Figura 3 prezintă receptanța șinei de-a lungul căii la trei frecvențe apropiate 65, 70 și 75 Hz care, așa cum se va vedea mai departe, cuprind domeniul frecvențelor proprii ale sistemului format din cele două roți și șină. Se observă schimbarea de semn de la cca. 1,7 m, precum și schimbarea ordinii valorilor celor trei receptanțe când distanța depășește 2 m.

În continuare ne propunem să analizăm regimul armonic permanent când roțile traversează o neregularitate a șinei cu lungimea de undă de 60 cm cu diferite viteze de circulație. În acest mod, se poate simula răspunsul roților la excitația parametrică datorată traverselor.

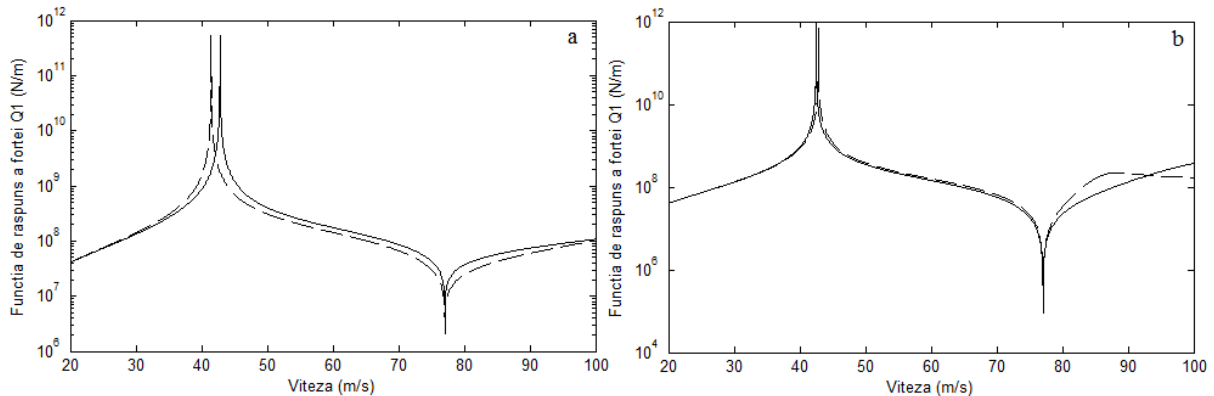


Fig. 4. Funcția de răspuns a forței de contact roată-șină Q_1 : a) —, $D = 1,5$ m, - - -, $D = 2,1$ m;
 b) —, $D = 1,8$ m, - - -, $D = 2,4$ m.

Figura 4 a prezintă funcția de răspuns a forței de contact roată-șină atunci când distanța dintre roți este 1,5 și 2,1 m, respectiv când distanța este multiplu impar al semi-lungimii de undă a neregularității suprafeței de rulare a șinei. Figura 5 prezintă aceeași funcție când $D = 1,8$ și respectiv 2,4 m – adică este multiplu par al semi-lungimii de undă. Se observă că sistemul are o singură frecvență de rezonanță așa cum se anticipa mai sus. Viteza de rezonanță (viteza la care se produce rezonanța) este 42,8 m/s pentru $D=1,5$ m și 41,5 m/s dacă $D = 2,1$ m. Totodată, dacă $D = 1,8$ m atunci viteza de rezonanță este 42,5 m/s și crește foarte

puțin, la 42,8 m/s, dacă $D = 2,4$ m. Pe de altă parte, se poate, indiferent de distanța dintre roți, la viteza de 77,06 m/s, forța Q_1 este practic nulă. În alți termeni, spunem că sistemul prezintă fenomenul de anti-rezonanță a cărei frecvență (128,4 Hz) corespunde cu frecvența de rezonanță a șinei.

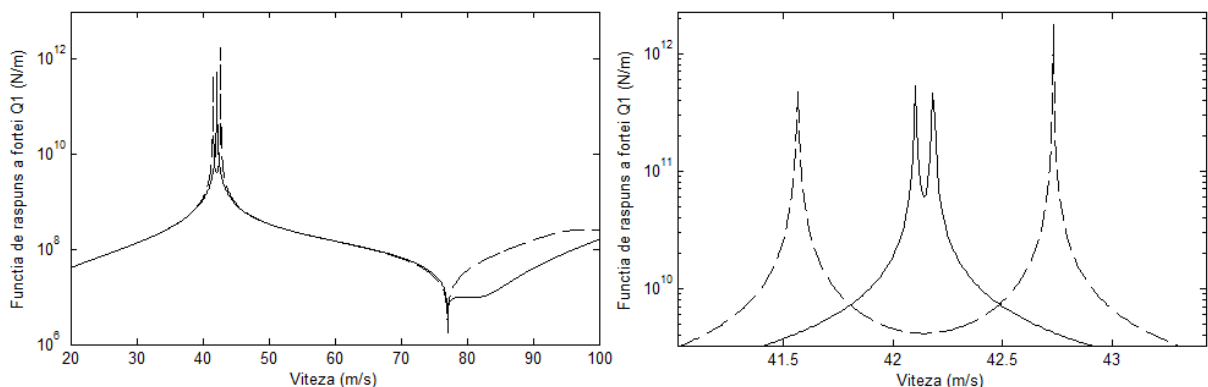


Fig. 5. Funcția de răspuns a forței de contact roată-șină Q_1 : —, $D = 1,65$ m, ---, $D = 1,95$ m.

Figura 5 prezintă funcția de răspuns a forței de contact Q_1 când distanța dintre roți nu mai este multiplu al semi-lungimii de undă a neregularității șinei. Sunt luate în calcul două valori pentru D , respectiv 1,65 și 1,95 m. În acest caz, sistemul format de cele două roți și șină are două viteze de rezonanță corespunzător formelor analitice din rel. (31). Aceste viteze de rezonanță iau valorile de 42,1 și 42,2 m/s dacă $D = 1,65$ m și 41,6 și 42,7 m/s pentru $D = 1,95$ m.

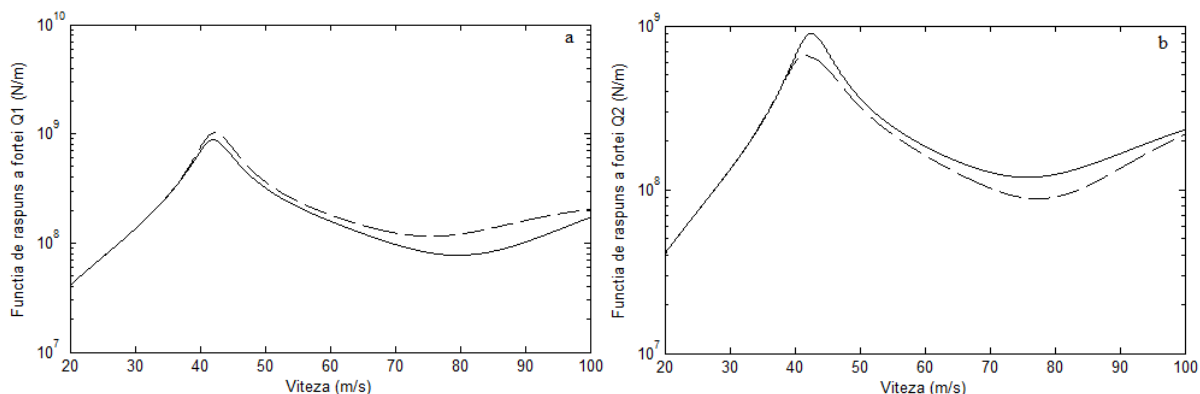


Fig. 6. Funcția de răspuns a forțelor de contact (model cu amortizare): a) Q_1 ; b) Q_2 ; —, $D = 1,65$ m, ---, $D = 1,95$ m.

Vitezele de rezonanță ale sistemului sunt atât de apropiate încât, în cazul modelului cu amortizare, vârfurile corespunzătoare acestor viteze de rezonanță nu se mai deosebesc. Acest aspect este ilustrat în figura 6 în care ambele etaje ale modelului căii au gradul de amortizare egal cu 0,2 (v. rel. 19). Sunt prezentate funcțiile de răspuns ale ambelor forțe de contact Q_1 și Q_2 pentru $D = 1,65$ și $D = 1,95$ m. Se observă că până la viteza de rezonanță, funcțiile de răspuns nu sunt influențate practic de distanța dintre roți, pentru ca la viteze superioare să apară anumite deosebiri. Astfel, forța Q_1 este mai mare dacă $D = 1,95$ m, în timp ce forța Q_2 este mai mică comparativ cu situația în care $D = 1,65$ m.

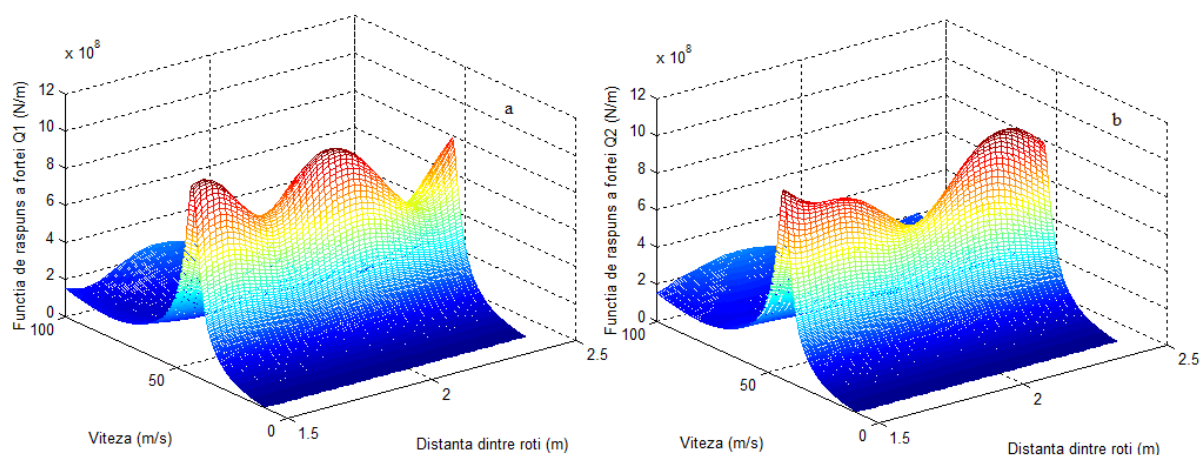


Fig. 7. Funcția de răspuns a forțelor de contact (model cu amortizare): a) Q_1 ; b) Q_2 .

Figura 7 prezintă funcția de răspuns a celor două forțe de contact pentru mai multe valori ale distanței dintre roți cuprinse între 1,5 și 2,4 m când viteza de circulație este între 10 și 100 m/s. Modelul căii are aceleași valori ale gradelor de amortizare ca și în cazul precedent. Viteza de rezonanță se modifică foarte puțin în funcție de distanța dintre roți, aceasta situându-se la aproximativ 42 m/s. Tendința generală a valorilor absolute ale funcției de răspuns a forțelor de contact Q_1 și Q_2 este de reducere pe măsură ce distanța dintre roți crește. Cu toate acestea, ambele funcții de răspuns prezintă maxime și minime locale după cum urmează. Maximele funcției Q_1 se înregistrează la $D = 1,55$ m și $D = 1,95$ m, în timp ce forța Q_2 are un singur maxim la $D = 2,26$ m. Valorile minime ale forței Q_1 sunt situate în dreptul punctelor de la $D = 1,73$ m și $D = 2,24$ m, iar forța Q_2 are un minim la $D = 1,96$ m.

6. CONCLUZII

Studiul interacțiunii roată-șină este important pentru că poate oferi răspunsuri la multe probleme practice cum ar fi combaterea zgomotului de rulare, a uzurii suprafețelor de rulare sau protecția clădirilor din zona căii ferate împotriva vibrațiilor transmise prin sol.

În lucrare sunt prezentate o serie de aspecte de bază legate de interacțiunea dintre două roți și o șină utilizând pentru cale un model alcătuit dintr-o grindă infinită pe fundație vâsco-elastică cu două etaje elastice. La traversarea unei neregularități armonice a șinei, cele două roți prezintă două viteze de rezonanță, dar în cazul în care distanța dintre roți (ampatamentul) este multiplu întreg al semi-lungimii de undă a neregularității șinei, atunci sistemul are o singură viteză de rezonanță. Forța de contact scade dacă ampatamentul crește, dar există valori ale ampatamentului pentru care fie forța de contact de la prima roată, fie de la cea de a doua, au valori maxime sau minime.

Referințe

- [1] J.P. Remington, „Wheel/rail rolling noise: what do we know? What don't we know? Where do we go from here?” in *Journal of Sound and Vibration* 120, 1988, pp. 203–226.
- [2] D.J. Thompson, C.J.C. Jones, „A review of the modelling of wheel/rail noise generation”, in *Journal of Sound and Vibration*, 231, 2000, pp. 519–536.

- [3] J.C.O. Nielsen, R. Lundén, A. Johansson, T. Vernersson, „Train–track interaction and mechanisms of irregular wear on wheel and rail surfaces”, in *Vehicle System Dynamics*, 40 (1–3), 2003, pp. 3–54.
- [4] K.H. Oostermeijer, „Review on short pitch rail corrugation studies”, in *Wear*, 265, 2008, pp. 1231–1237.
- [5] X. Sheng, C.J.C. Jones, D.J. Thompson, „A theoretical model for ground vibration from trains generated by vertical track irregularities, *J. Sound Vib.* 272 (2004) 937–965.
- [6] G. Lombaert, G. Degrande, „Ground-borne vibration due to static and dynamic axle loads of InterCity and high-speed trains, *J. Sound Vib.* 319 (3–5)(2009) 1036–1066.
- [7] T.X. Wu., D.J. Thompson, „On the parametric excitation of the wheel/track system”, in *Journal of Sound and Vibration*, 278, 2004, pp.725–747.
- [8] T. Mazilu, „Prediction of the interaction between a simple moving vehicle and an infinite periodically supported rail—Green’s functions approach”, in *Vehicle System Dynamics*, 48 (9), 2010, pp. 1021–1042.
- [9] T.X. Wu, D.J. Thompson, „Vibration analysis of railway track with multiple wheels on the rail”, in *Journal of Sound and Vibration*, 239, 2001, pp. 69-97.
- [10] X. Sheng, M. Li, C.J.C. Jones, D.J. Thompson, „Using the Fourier-series approach to study interaction between moving wheels and a periodically supported rail”, in *Journal of Sound and Vibration*, 303, 2007, pp. 873–894.
- [11] T. Mazilu, „Vibrații roată/șină“, Editura MatrixRom, București, 2008.