

UTILIZAREA METODELOR NUMERICE LA MODELAREA COMPORTAMENTULUI STRUCTURILOR DUBLU ARTICULATE SOLICITATE LA FLAMBAJ

ISSUES CONCERNING ELASTIC BUCKLING STRUCTURAL BEHAVIOUR SIMULATION IN MODERN F.E.A. APPROACH

Ștefan MOCANU

Universitatea Tehnica de Constructii Bucuresti, Romania
e-mail: mocanustef@gmail.com

Rezumat: Flambajul structurilor svelte din domeniul mecanic sau al construcțiilor civile industriale a făcut obiectul a numeroase studii de-a lungul timpului. Scopul prezentului articol este de a compara abordarea clasică a problemei conform Rezistenței Materialelor în raport cu algoritmi numerici utilizați în aplicațiile de analiză a comportamentului structurilor, algoritmi ce au la bază metoda elementului finit.

Cuvinte cheie: flambaj, pierderea_stabilității, forma_de_echilibru, elastic, sarcină, critic.

Abstract: The sudden loss of structural stability for slender structures in both mechanical and civil engineering areas has been the object of numerous studies. The present paper is focused on elementary strength of materials calculus concerning critical force values vs. finite element analysis results concerning simple beam buckling.

Keywords: buckling, failure_mode, elastic_instability, critical_force.

1. INTRODUCERE

Este știut faptul că un element structural supus solicitării de compresiune va avea capacitatea portantă direct proporțională cu valoarea caracteristicilor geometrice ale secțiunii (aria suprafeței secțiunii transversale, momentul de inerție axial în raport cu axa neutră a secțiunii, etc.); în cadrul activității de proiectare acest fapt poate conduce la tendința de realizare a unor secțiuni înalte și înguste, aceste tipuri de elemente devenind însă instabile datorită apariției fenomenului de pierdere a stabilității formei de echilibru elastic i.e. flambaj prin compresiune [1, 2].

Prezentul articol se dorește a fi un punct de plecare în abordarea cu ajutorul algoritmilor numerici ce au la bază metoda elementului finit, a problemelor de stabilitate a structurilor svelte supuse la compresiune, gradul ridicat de complexitate al aplicației impunând un studiu atent în ceea ce privește setul de condiții inițiale impuse ca mărimi de intrare.

2. TRATARE ANALITICĂ. EXEMPLU NUMERIC

Pentru nevoile studiului se va prezenta succint algoritmul elementar de stabilire a probabilității de apariție a flambajului, pentru o structură dublu articulată de secțiune

dreptunghiulară (fig.1), exemplu numeric $P = 10\text{kN}$; $l = 2\text{ m}$, material oțel S235 JR (OL37-2k), metoda utilizată fiind cea a coeficientului de siguranță la flambaj c [1, 2].

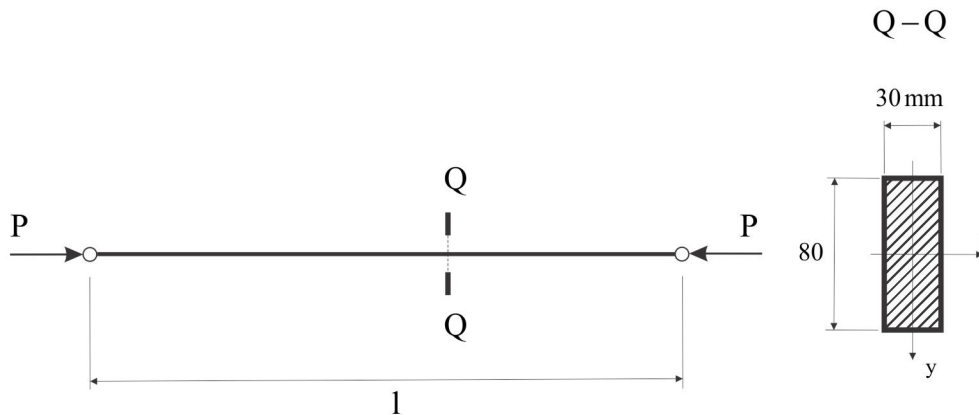


fig.1

Se stabilește domeniul de flambaj pentru exemplul dat; se determină coeficientul de sveltețe, astfel [3, 4]:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}}; \quad \lambda_{\text{ef}} = \frac{2 \cdot 10^3}{\sqrt{\frac{80 \cdot 30^3}{12} \cdot \frac{1}{80 \cdot 30}}} = 230,94, \quad (1)$$

se remarcă faptul că $\lambda_{\text{ef}} > \lambda_0^{\text{OL37}} (=105)$, situându-ne în domeniul elastic de flambaj (Euler buckling).

Se calculează coeficientul efectiv de siguranță la flambaj:

$$c_{\text{ef}} = \frac{P_{\text{cr}}}{P}; \quad c_{\text{ef}} = \frac{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{80 \cdot 30^3}{12}}{(2 \cdot 10^3)^2}}{10 \cdot 10^3}, \quad c_{\text{ef}} = 9,327. \quad (2)$$

3. ABORDARE CU METODE NUMERICE

Indiferent de tipul exact al aplicației software sau de platforma / sistemul de operare utilizat, gradul relativ ridicat de complexitate al problemei impune rezolvarea acesteia în doi pași: o analiză a flambajului în domeniul liniar, care va furniza valoarea estimată a sarcinii critice de flambaj, urmată de o analiză neliniară, având drept încărcare sarcina inițială multiplicată cu coeficientul de siguranță la flambaj anterior stabilit [7].

Acest mod de lucru este datorat faptului că analiza liniară (linear buckling analysis) estimează sarcina critică de flambaj (în speță, coeficientul de siguranță la flambaj – load factor) pentru forma nedeformată a structurii, pe când așa-zisa analiză neliniară (non-linear buckling analysis) va reface etapa de calcul liniară ținându-se cont de modul de deformare al structurii. Generic vorbind, analiza neliniară va trata de o manieră secvențială valorile schemei de încărcare a structurii, pentru fiecare treaptă de încărcare fiind recalculată matricea rigiditate a structurii la starea corespunzătoare de deformare [8, 9, 10].

Utilizarea metodelor numerice la modelarea comportamentului structurilor dublu articulate solicitate la flambaj

În plus, față de alte tratări similare ale fenomenului, se va avea în vedere utilizarea elementului finit cu opțiuni complete în ceea ce privește discretizarea structurii (meshing), soluțiile simplificatoare de tipul beam-meshing nesuportând analize de tip neliniar și nu în ultimul rând, scheme de rezemare de orice fel (cazul prezentat, de exemplu, neputând a fi modelat satisfăcător).

Se ajunge la un ansamblu de două piese conjugate (fig.2), piese a căror design permite modelarea schemei de calcul dorite (schemă de rezemare – tronson dublu articulat, schemă de încărcare – compresiune centrică).

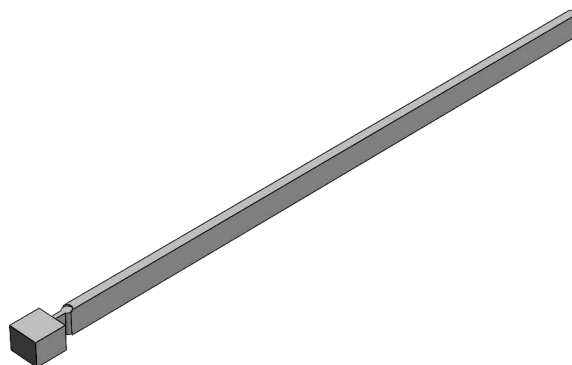


fig.2

Parcursul studiului în sine implică efectuarea unor setări specifice (fig.3) în ceea ce privește tipul motorului de rezolvare (solver – Direct Sparse) cât și a metodei de control a pașilor încercării (control – Arc Length), precum și a metodei de iterare (iterative – Newton/Raphson), setări specifice felului de studiu dorit[7, 8].

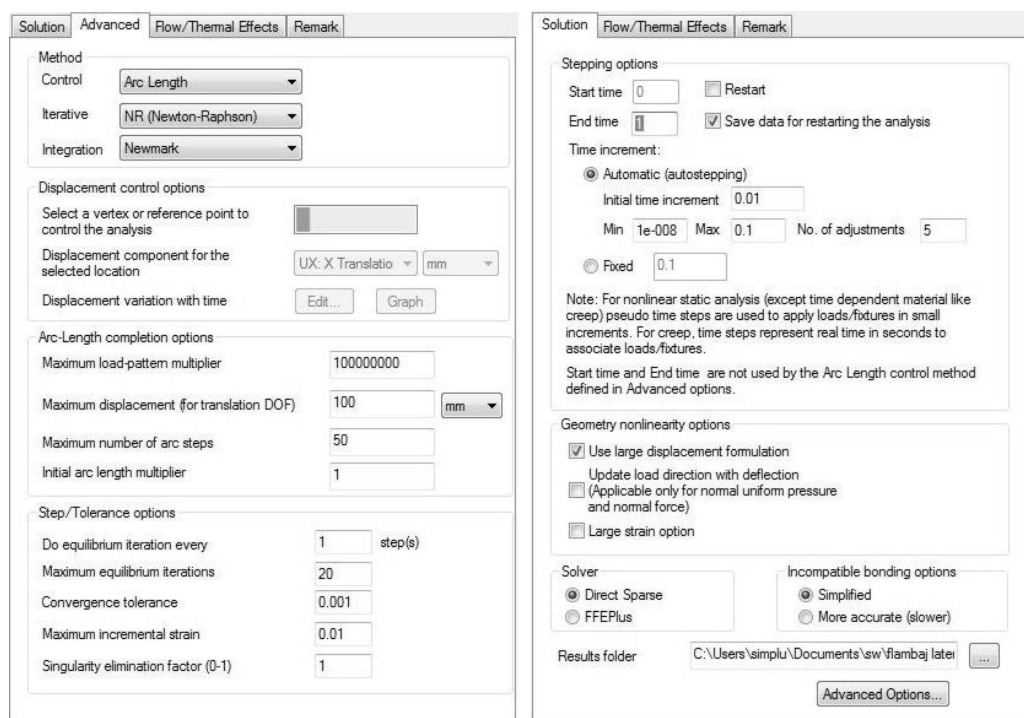


fig.3

Particularitățile studiului vor fi completate prin tipul de interfață de lucru dintre cele două piese ce alcătuiesc ansamblul (Connectors – Pin Connector), cu permiterea gradului de libertate în termeni de rotire în raport cu axa articulației propriu-zise (fig.4), precum și prin modul de alegere efectivă a schemei de rezemare/încărcare, în concordanță cu modul de proiectare al extremității tronsoanelor (fig.5).

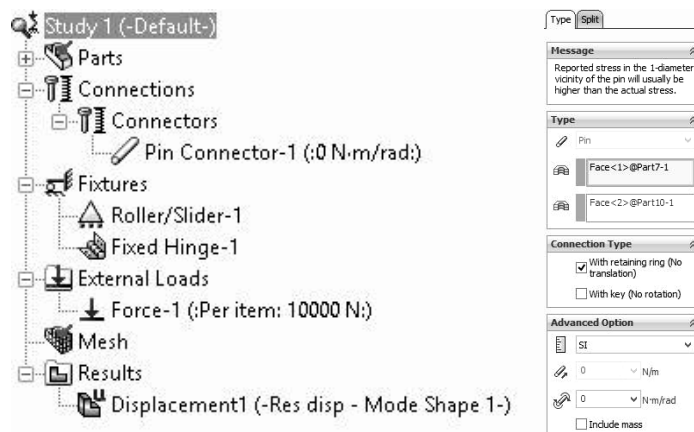


fig.4

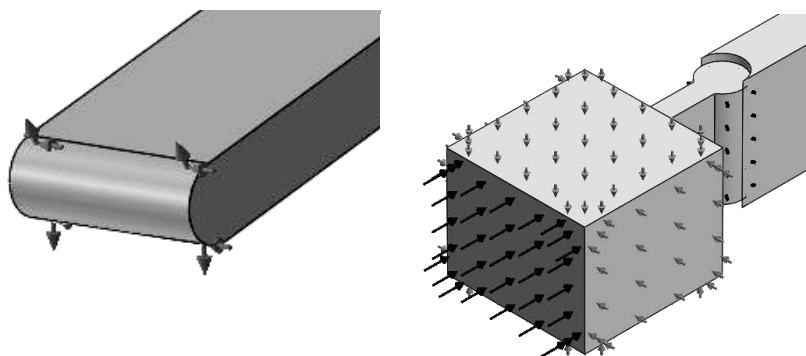


fig.5

După parcurgerea etapelor succesive de discretizare (meshing) și analiză efectivă, se ajunge la valorile estimate ale coeficientului de siguranță la flambaj, în varianta studiului liniar respectiv neliniar (fig.6, 7).

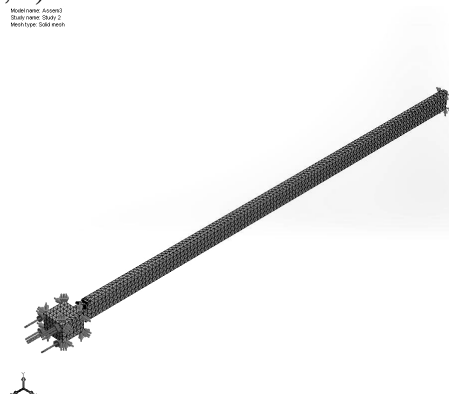


fig.6

Utilizarea metodelor numerice la modelarea comportamentului structurilor dublu articulate solicitate la flambaj

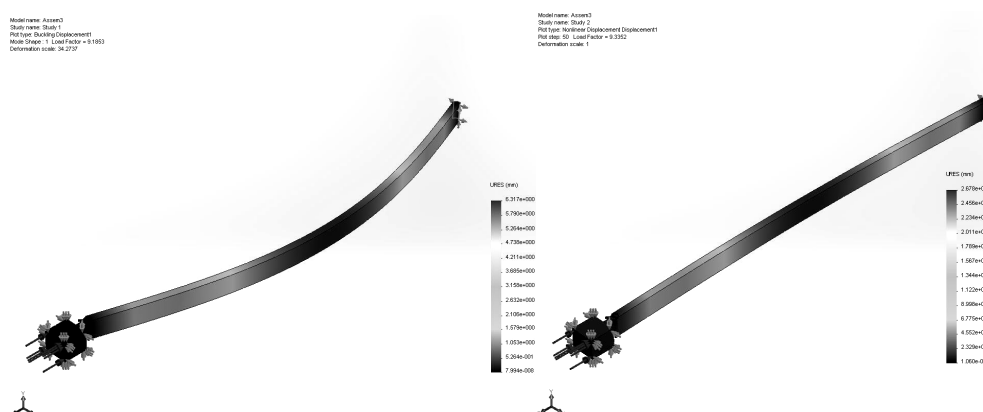


fig.7

Indiferent de aplicația software utilizată [7, 9, 10], găsirea soluțiilor unei probleme de analiză cu ajutorul F.E.M. implică rezolvarea simultană a mai multor ecuații, existând două mari familii de metode de rezolvare: metoda directă, ce utilizează algoritmi numerici de tipul matrice inversă, descompunere LU, Gauss-Jordon, respectiv metode iterative, în cadrul cărora se utilizează tehnici de calcul aproximative pentru găsirea unei soluții, secvența de calcul repetându-se până la obținerea gradului de convergență impus.

În cazul de față se optează pentru studiul cu algoritm de rezolvare direct DSS (Direct Sparse Solver), avându-se în vedere că algoritmi iterativi implicați de rezolvare FFEPlus (Fourier Finite-Element Plus), se pretează mai curând la analize de tip liniar.

În urma mai multor încercări de simulare, gradul maxim de precizie al soluțiilor (incluzând și absența mesajelor de eroare), se obține pentru metoda Crisfield-Riks de control pentru simularea numerică (Incremental Arc Length Control Method), respectiv pentru metoda de calcul iterativ Newton-Raphson (NR) (fig.8).

În cazul analizei neliniare, sistemul de ecuații de rezolvat la momentul generic $t + \Delta t$, este de forma:

$$\{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t} = 0, \quad (3)$$

în care $\{R\}_{t+\Delta t}$ reprezintă matricea vectorilor sarcinilor exterioare aplicate în nodurile structurii, iar $\{F\}_{t+\Delta t}$ matricea vectorilor eforturilor interne la nivelul nodurilor; necesitatea utilizării unei metode iterative este dată de dependența valorii matricii $\{F\}_{t+\Delta t}$ de matricea deplasărilor nodurilor rețelei de elemente $\{u\}_{t+\Delta t}$ la momentul dat. Astfel, forma simplificată a unei trepte de calcul (iterație de rang i), poate fi reprezentată prin setul de relații:

$$\begin{aligned} \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} &= \{\Delta R\}^{(i-1)}, \\ \{\Delta R\}^{(i-1)} &= [K]_{t+\Delta t}^{(i)} \{\Delta u\}^{(i)}, \\ \{\Delta u\}^{(i)} &= \{u\}_{t+\Delta t}^{(i)} - \{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}, \\ \{u\}_{t+\Delta t}^0 &= \{u\}_t; \quad \{F\}_{t+\Delta t}^0 = \{F\}_t, \end{aligned} \quad (4)$$

unde:

- $\{R\}_{t+\Delta t}$ – matricea sarcinilor exterioare la nivelul nodurilor structurii;
- $\{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}$ – matricea eforturilor interne din nodurile rețelei, la iterația de rang “i”;
- $\{\Delta R\}^{(i-1)}$ – matricea vectorilor de sarcină reziduală (out-of-balance load vector), la iterația de rang “i”;
- $\{\Delta u\}^{(i)}$ – matricea treaptă pentru deplasări, la iterația de rang “i”;
- $\{u\}_{t+\Delta t}^{(i)}$ – matricea deplasărilor, la iterația de rang “i”;
- $[K]_{t+\Delta t}^{(i)}$ – matricea Jacobian (tagent stiffness), la iterația de rang “i”.

Metoda Newton-Raphson de calcul iterativ este reprezentată schematic în figura 8, în ordonată fiind reprezentate sarcinile exterioare, iar în abscisă deplasările; se remarcă reestimarea termenilor matricii Jacobian pentru fiecare iterație efectuată în cadrul treptei de calcul dată ($R_t \div R_{t+\Delta t} / u_t \div u_{t+\Delta t}$).

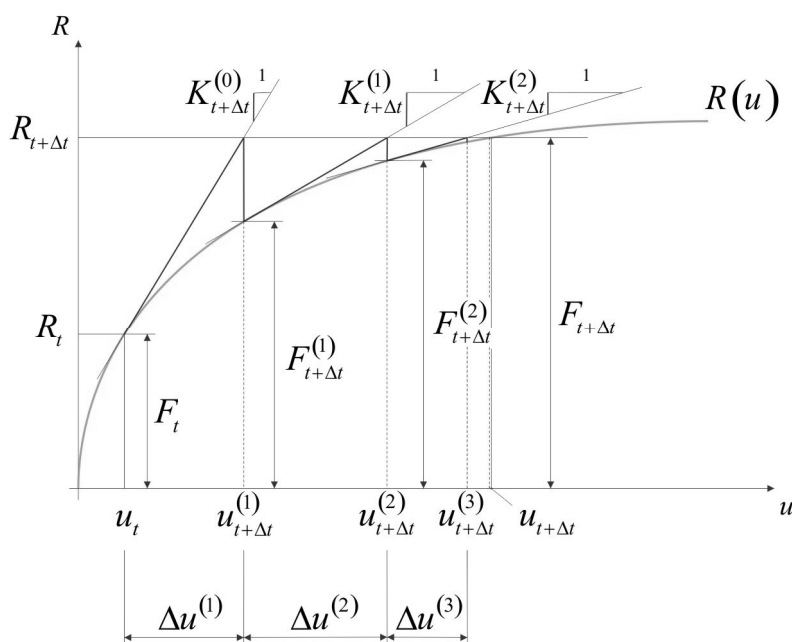


fig.8

Utilizarea algoritmului de rezolvare neliniar este datorată în principal amplitudinii deformațiilor structurale, nemaiputând fi ignorate modificările termenilor matricii rigiditate odată cu creșterea sarcinii; în cazul unor aplicații de ultimă generație se remarcă prezența unei opțiuni dedicate de calcul neliniar (large displacement formulation), cu luarea în calcul a deformațiilor mari ale structurii studiate, variantă valabilă în cazul utilizării discretizării de tip solid (solid meshing) sau membrană (shell) [7].

4. CONCLUZII

Convergența soluției obținute se poate constata din setul de mărimi de ieșire prezentate în figurile 6, 7, set conform căruia valoarea coeficientului de siguranță la flambaj este în imediată vecinătate a valorii obținută prin calcul analitic, fiind astfel confirmată valoarea critică de flambaj sugerată de analiza liniară anterior efectuată, precum și valabilitatea tratării analitice clasice (fig.9).

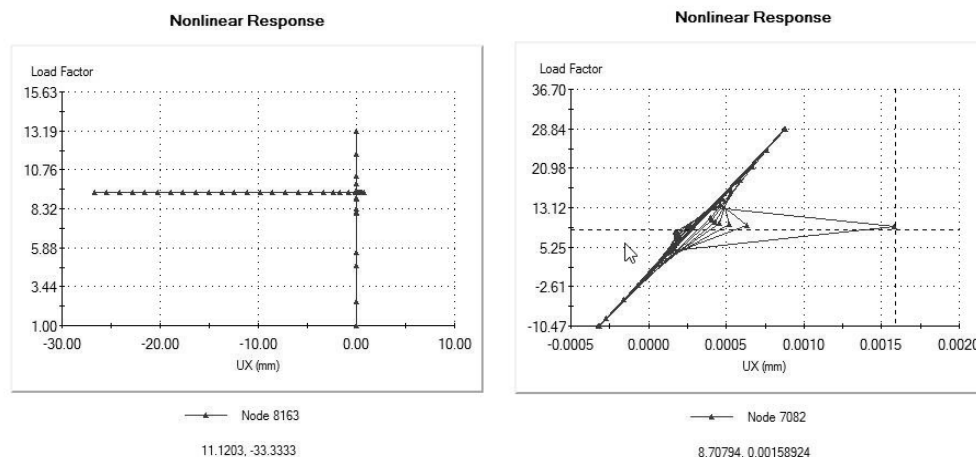


fig.9

În urma studiului efectuat a fost constatat și un anumit grad de dispersie a rezultatelor în cazul utilizării diverselor aplicații software și/sau mediilor/ platformelor de lucru utilizate (Ansys, Solidworks/Windows, Salome-Meca, OpenFoam, Code Aster/ Linux), rămânând astfel valabilă regula folosirii, prin comparație, a cel puțin două variante de abordare.

Pentru cazul studiat, de departe, rangul de precizie cel mai ridicat al rezultatului (având drept referință soluțiile analitice tradiționale), a fost obținut pentru aplicațiile software comerciale de ultimă generație, remarcându-se pași semnificativi și pentru familia open-source de programe în ceea ce privește algoritmi neliniari de analiză în baza metodei elementului finit, făcându-se totuși simțită absența unor programe de implementare dedicate (scheme de rezemare/ încărcare greoaie, lipsa unor opțiuni bogate în ceea ce privește setările motoarelor de rezolvare – solvers, etc.).

BIBLIOGRAFIE

- [1] Buzdugan Ghe., „Rezistența materialelor”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964.
- [2] Deutsch I., „Rezistența materialelor”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [3] Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E., „Rezistența materialelor”, vol.II, Institutul de Construcții București, 1981.
- [4] Andreescu I., Mocanu Șt., „Compendiu de Rezistența Materialelor”, Matrix Rom, București, 2005.
- [5] Vigodski M., „Mathematical Handbook”, MIR Publishers Moscow, 1975.
- [6] Popov E.P., „Mechanics of Materials”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [7] http://help.solidworks.com/2012/English/SolidWorks/cworks/IDH_HELP_NONLINEAR_SOLUTION.htm.

- [8] <http://ecad-engineering.co.uk/13-direct-sparse-and-ffeplus-solvers/>.
- [9] http://www.kxcad.net/ansys/ANSYS/ansyshelp/thy_tool10.html.
- [10] <http://www.code-aster.org/V2/spip.php?article282>.
- [11] <http://www.csc.fi/english/pages/elmer/documentation>.