

RIGIDITATEA CA PARAMETRU DE OPTIMIZARE AL UNEI STRUCTURI

GLOBAL STIFFNESS RELATED STRUCTURAL OPTIMISATION

Ștefan MOCANU

Universitatea Tehnică de Construcții București, România
e-mail: mocanustef@gmail.com

Rezumat: Optimizarea parametrilor de proiectare ai structurilor din zona generică a construcțiilor de mașini constituie, la ora actuală, o chestiune de majoră importanță; articolul de față propune o abordare duală în ceea ce privește optimizarea unei structuri având drept criteriu de performanță rigiditatea acesteia.

În urma tratării prin calcul clasic, respectiv calcul cu ajutorul metodei elementului finit, se constată o bună dispersie a valorilor de referință finale obținute, fiind totuși necesară tratarea cu rigurozitate a modalităților de stabilire a ipotezelor de calcul inițiale.

Cuvinte cheie: cadru, circular, simetrie, încovoiere, rigiditate, Maxwell-Mohr, F.E.A.

Abstract: Structural optimisation remains a key issue in today's constructive design and machine building area. The present paper covers a dual-approach example concerning traditional calculus method versus finite element analysis simulation for a given class of problems (statically determinate/indeterminate plane frame structures), in order to establish the level of confidence for a certain group of commercial finite element systems used as solvers in engineering problems.

As a result of completing the above procedure, an excellent scatter plot of output measurements was obtained, however caution is advisable due to initial analysis parameter settings and strength of materials calculus hypothesis.

Keywords: frame, circular, symmetry, bending, stiffness, Maxwell-Mohr, F.E.A.

1. INTRODUCERE

Având drept sursă de de inspirație o așa-zisă culegere de modă-veche de aplicații avansate de Rezistența Materialelor [1]– referința în activitatea didactică curentă, articolul de față propune abordarea optimizării structurale din punctul de vedere al rigidității ansamblului în discuție.

Pe de alta parte, oricât de elegante ori aproape de suflet ar fi metodele clasice de calcul, nivelul de complexitate al problemelor actuale necesită utilizarea abordării cu ajutorul metodei de calcul cu element finit, situație ce impune studiul atent al condițiilor/parametrilor inițiali de stabilit în etapa premergătoare analizei propriu-zise, implicit nevoia de a stabili domeniul de valabilitate din punctul de vedere al pertinentei rezultatelor obținute, în funcție de varianta aleasă de algoritm.

2. EXEMPLU

Formularea problemei. Abordare tradițională

Se consideră o sarcină de valoare $2P$ ce acționează asupra unui cadru plan încărcat în planul său, cadrul având în componență atât tronsoane de formă rectilinie cât și sectoare de bară curbă (Fig.1); problema cere stabilirea valorii parametrului geometric al schemei de rezemare “ a ”, în scopul obținerii unei rigidități maxime a sistemului. Pentru simplificare, rigiditățile tronsoanelor rectilinii și curbilunii sunt considerate constante.

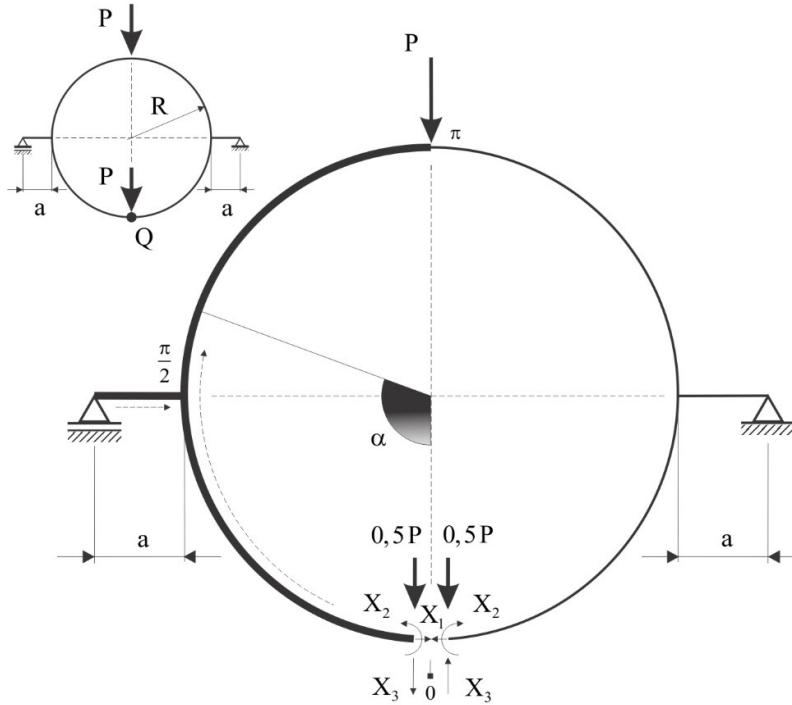


Fig.1 Sistemul static nedeterminat inițial și forma de bază utilizată la ridicarea nedeterminării

O posibilă formă de bază a sistemului de trei ori static nedeterminat propus este reprezentată în figura 1; avându-se în vedere simetria schemelor de rezemare, respectiv încărcare, valoarea necunoscutei antisimetrice tip forță tăietoare este nulă ($X_1; X_2 \neq 0, X_3 = 0$) [2, 3, 4]. Prin utilizarea în exclusivitate a termenilor din moment încovoietor în ecuația Maxwell-Mohr[5], ridicarea nedeterminării sistemului implică rezolvarea sistemului de două ecuații cu două necunoscute (1), de forma:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{10} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{20} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Prin utilizarea polinoamelor ce descriu legile de variație ale diagramelor de moment încovoietor m_1, m_2 , datorate încărcării succesive a formei de bază cu necunoscutele $X_1 = \bar{1}, X_2 = \bar{1}$, se obțin termenii caracteristici:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\delta_{11} &= \int_0^{\pi} [-R(1-\cos\alpha)]^2 R d\alpha; \\ \frac{1}{2}\delta_{22} &= \int_0^{\pi} (-1)^2 R d\alpha; \\ \frac{1}{2}\delta_{12} &= \frac{1}{2}\delta_{21} = \int_0^{\pi} [(-1)(-R(1-\cos\alpha))] R d\alpha,\end{aligned}\quad (2)$$

iar cu aportul diagramei M_0 (forma de bază încărcată cu sarcina inițială $2P$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_{10} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(-R(1-\cos\alpha))(0,5PR \sin\alpha)] R d\alpha + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [(-R(1-\cos\alpha))(Pa + PR - 0,5PR \sin\alpha)] R d\alpha,\end{aligned}\quad (3)$$

$$\frac{1}{2}\Delta_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)(0,5PR \sin\alpha) R d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1)(Pa + PR - 0,5PR \sin\alpha) R d\alpha. \quad (4)$$

După prelucrări [6, 7], expresiile (2), (3) și (4) devin:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\delta_{11} &= 1,5\pi R^3; \quad \frac{1}{2}\delta_{22} = \pi R; \quad \frac{1}{2}\delta_{12} = \frac{1}{2}\delta_{21} = \pi R^2; \\ \frac{1}{2}\Delta_{10} &= -\left(0,5 + \frac{\pi}{2}\right) PR^3 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) PR^2 a; \\ \frac{1}{2}\Delta_{20} &= -\frac{\pi}{2} PR^2 - \frac{\pi}{2} PR a,\end{aligned}\quad (5)$$

astfel, soluțiile sistemului de ecuații (1) fiind:

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{P}{\pi} \left(1 + 2\frac{a}{R}\right); \\ X_2 &= \frac{PR}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \frac{a}{R}\right].\end{aligned}\quad (6)$$

Fie proiecția pe verticală a deplasării punctului Q criteriul de performanță ales pentru cuantificarea rigidității globale a sistemului - v_Q , astfel:

$$v_Q = \frac{1}{EI} \int m_Q^0 M ds, \quad (7)$$

în care m_Q^0, M , expresiile polinomiale de variație ale momentelor încovoietoare corespunzătoare, în consecință:

$$\begin{aligned} \frac{EI}{2} v_Q = & \frac{Pa \cdot a}{2} \frac{2}{3} 0,5a + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0,5R^2 \sin \alpha \left[RP \left(\frac{\cos \alpha}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) + aP \left(\frac{2 \cos \alpha}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \right] d\alpha + \\ & + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0,5R(a+R) \left[RP \left(\frac{\cos \alpha}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) + aP \left(\frac{2 \cos \alpha}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right] d\alpha, \end{aligned} \quad (8)$$

sau

$$\begin{aligned} \frac{EI}{2} v_Q = & PR^3 \left(-\frac{0,5}{2\pi} + \frac{0,75\pi}{4} - 0,5 \right) + PR^2 a \left(-\frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{4} - 0,5 \right) + \\ & + a^2 PR \left(-\frac{1}{\pi} + \frac{0,25\pi}{2} \right) + \frac{1}{6} Pa^3. \end{aligned} \quad (9)$$

Prin introducerea termenului $\frac{a}{R} = q$, expresia (9) devine:

$$v_Q = \frac{2PR^3}{EI} \left(\frac{1}{105,58} - \frac{1}{30,384} q + \frac{1}{13,443} q^2 + \frac{1}{6} q^3 \right). \quad (10)$$

Parametrul q pentru care mărimea v_Q va avea valoarea minimă (rigiditate globală maximă a structurii), se obține prin anularea primei derivate a expresiei (10) în raport cu q , astfel:

$$\frac{d(v_Q)}{dq} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{30,384} + \frac{2}{13,443} q + \frac{3}{6} q^2 = 0; \quad (11)$$

rădăcinile ecuației (11) sunt:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0,147801; \\ (q_2 &= -0,443357). \end{aligned} \quad (12)$$

Abordare cu Metoda Elementului Finit (F.E.A.)

Pentru stabilirea nivelului de acuratețe al studiului, se parcurge algoritmul de simulare prin metode numerice [8, 9, 10] pentru un exemplu numeric dat ($P = 150 \text{ daN}$, $R = 5 \text{ m}$, $E = 2,1e5 \text{ MPa}$, $I = 4,93e6 \text{ mm}^4$); se consideră variabilă de lucru mărimea q , în consecință mărimea proiecției pe verticală a deplasării secțiunii Q va depinde de parametrul q , $v_Q = f(q)$.

Principalele mărimi inițiale ce influențează gradul de precizie al rezultatelor obținute sunt tipul și dimensiunea elementului de discretizare admis (Tabel 1), respectiv calitatea modelării schemei de rezemare a structurii; este bine-știut faptul că o anumite abordare cu ajutorul metodei elementului finit (F.E.M.) poate induce o serie de inexactități și simplificări ce vor influența precizia calculului, pentru fiecare etapă a acestuia [11].

Tabel 1. Deplasarea v_Q în funcție de diverși parametri

a [m]	$q = \frac{a}{R}$	v_Q [mm]	
		beam mesh	solid mesh
0,5	0,1	2,551	2,548
0,6	0,12	2,479	2,475
0,7	0,14	2,445	2,438
0,73	0,146	2,443	2,434
0,735	0,147	2,443	2,433
0,74	0,148	2,443	2,433
0,745	0,149	2,444	2,433
0,75	0,15	2,444	2,432
0,755	0,151	2,444	2,432
0,76	0,152	2,445	2,432
0,8	0,16	2,454	2,435
0,9	0,18	2,507	2,472
1	0,2	2,608	2,549

3. STUDIU COMPARAT, OBSERVAȚII

Se remarcă existența unor variații a proiecției pe verticală a deplasării secțiunii Q, pentru diverse valori ale raportului q , diferențe datorate în principal modului general de discretizare caracteristic celor două aplicații utilizate (discretizare tip beam – simplificată, Fig.2, în comparație cu discretizarea de tip solid, Fig.3, abordare ce utilizează un număr mult mai mare de elemente), respectiv modelarea schemei de rezemare a structurii.

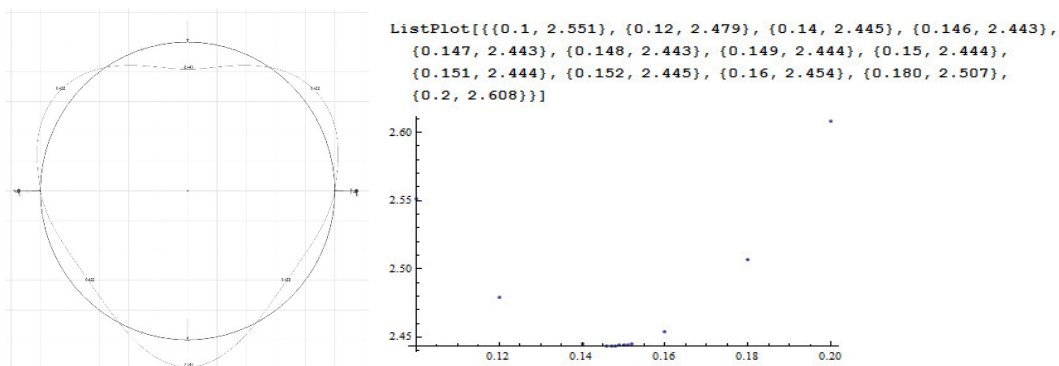


Fig.2 Deformata sistemului și mărimile de intrare/ieșire în AxisVM13 LT (q -abscisă, v_Q – ordonată).

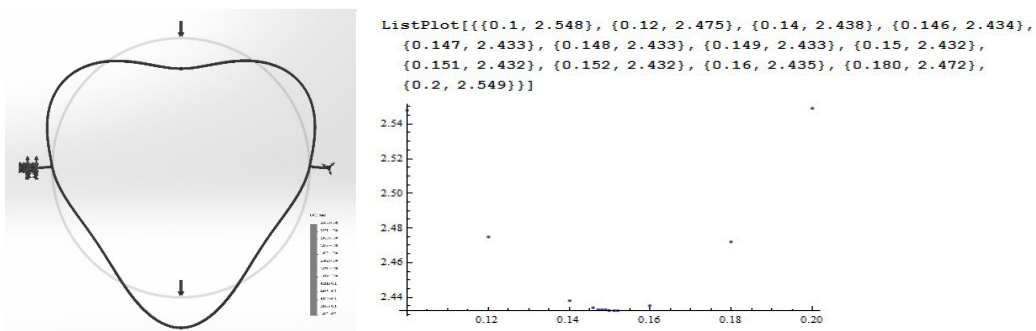


Fig.3 Deformata sistemului și mărimile de intrare/ieșire în SolidWorks 2014 (q -abscisă, v_Q – ordonată).

Dintr-un alt punct de vedere, diferențele minore înregistrate pentru perechea mărime de intrare/ieșire în cazul comparării metodei tradiționale de abordare versus tratare cu element finit (Fig.4), pot fi puse pe seama luării în calcul doar a termenilor din moment încovoietor la utilizarea relației de bilanț energetic Maxwell-Mohr.

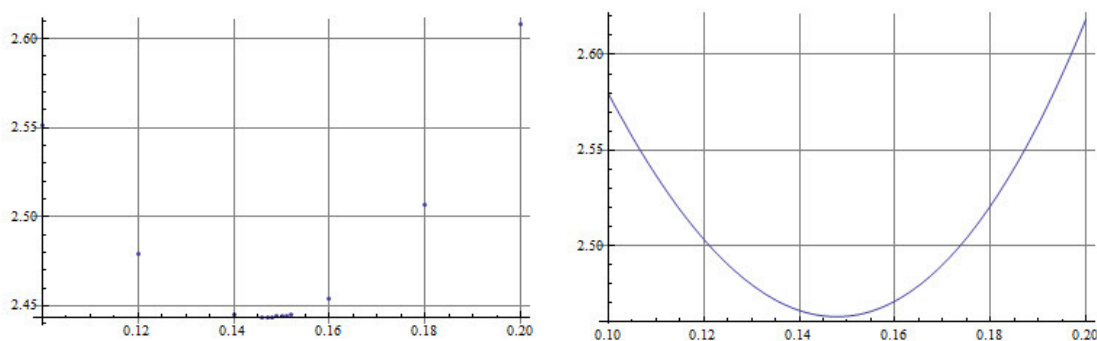


Fig.4 Studiu comparat al mărimilor de intrare/ieșire (abordare element finit – stânga, calcul clasic – dreapta).

4. CONCLUZII

Dincolo de aspectul estetic inedit al deformatelor sistemului propus sau a inerentelor diferențe cauzate de modalitățile diverse de abordare, se remarcă o împrăștiere satisfăcătoare a valorilor mărimii de ieșire, concret fiind vorba de valoarea criteriului geometric q corespunzător rigidității maxime a structurii (v_Q minim).

Cu toate acestea, modelarea generică a schemei de rezemare (Fig.5) poate duce, pentru anumite cazuri particulare complexe, la diferențe majore din punctul de vedere al preciziei rezultatelor finale obținute.



Fig.5 Modelarea schemei de rezemare, AxisVM/SolidWorks

(reazem simplu – articulație)

Parametrii de discretizare precum și particularitățile de modelare a schemei de rezemare a structurii influențează în mod hotărâtor precizia mărimilor de ieșire ale studiului, cele mai minore erori cauzând mari abateri ale rezultatelor obținute (puncte de singularitate ce pot cauza creșteri artificiale ale stării de tensiune, elemente ale rețelei de discretizare cu muchii exagerat deformată – poor aspect ratio, abaterea de la comportamentul liniar elastic a materialului, modelarea corectă a schemei de încărcare cu referire la Principiul lui Barre de Saint-Venant [12], etc.).

BIBLIOGRAFIE

- [1] Feodosyev, V., I., *Selected Problems and Questions in Strength of Materials*, MIR Publishers Moscow, 1977.
- [2] Ungureanu, I., Ispas, B., Constantinescu, E., *Rezistentă Materialelor*, Institutul de Construcții București, 1981.
- [3] Andreescu, I., Mocanu, St., *Compendiu de Rezistentă Materialelor*, Matrix Rom, București, 2005.
- [4] Popov, E., P., *Mechanics of Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [5] Mocanu, St., *Contribuții la studiul influenței elasticității structurilor articulate ale echipamentelor de lucru, specifice masinilor de construcții, asupra performanțelor dinamice ale sistemelor de reglare automată a poziției*, Teza de Doctorat, Universitatea Tehnică de Construcții București, 2002.
- [6] Luzin, N., N., *Calcul diferențial*, Editura Tehnică, București, 1954.
- [7] Vigodski, M., *Mathematical Handbook*, MIR Publishers Moscow, 1975
- [8] www.cadworks.ro/.
- [9] www.3dcadvegra.ro/.
- [10] www.consoft.ro/.
- [11] Akin, J., Ed, *“Finite Element Analysis Concepts via SolidWorks”*, World Scientific, Rice University, Houston, Texas, 2009, 12 - 15.

[12] **Mocanu St.**, *Scurt comentariu asupra interpretării principiului lui Barre de Saint-Venant în contextul modelării schemei de rezemare prin metoda elementului finit*, Sinteze de Mecanica Teoretică și Aplicată, vol.7 (2016), nr.1, Ed. MatrixRom, București, ISSN 2068-6331, p. 17-26.