

## ANALIZA TRANSMISIBILITĂȚII ȘI A GRADULUI DE IZOLARE A VIBRAȚIILOR LA SISTEMELE MECANICE CU AMORTIZARE STRUCTURALĂ. MODELUL ZENER

### ANALYSIS OF THE TRANSMISSIBILITY RATIO AND THE ISOLATION DEGREE OF THE VIBRATION FOR MECHANICAL SYSTEMS WITH STRUCTURAL DAMPING. ZENER MODEL

Gianina Cornelia SPÂNU (ȘTEFAN)<sup>1</sup>, Nicușor DRĂGAN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Romania Școala Doctorală de Inginerie  
e-mail: spanugianina@yahoo.com

<sup>2</sup>Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania  
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET  
e-mail: ndragan@ugal.ro

**Rezumat:** *Articolul propune o abordare a unui model dinamic cu grad de libertate al unui sistem mecanic elastic cu amortizare structurală (model reologic Zener). Modelul Zener, cunoscut și sub denumirea de model SLS (Standard Linear Solid), descrie comportamentul dinamic al unui sistem mecanic viscoelastic liniar într-un set dat de condiții de solicitare dinamică. Modelul reologic Zener este o structură paralelă complexă, un model Maxell în paralel cu un model Hooke. Sistemul este perturbat de o forță armonică  $F_0 \sin \omega t$ , parametrul dinamic fiind amplitudinea vibrației forțate la starea de echilibru și forța transmisă fundației. Caracteristicile dinamice parametrice care sunt trase și analizate sunt transmisibilitatea și gradul de izolare a vibrațiilor.*

**Cuvinte cheie:** *vibrații forțate staționare, amortizare structurală, model Zener, transmisibilitate, grad de izolare*

**Abstract:** *The article proposes an approach of a 1DOF (1 Degree Of Freedom) dynamic model of an elastic mechanical system with structural damping rheologically modeled as a Zener model. Zener model, also known as SLS (Standard Linear Solid) model, describes the dynamic behavior of a linear viscoelastic mechanical system under a given set of loading conditions. Rheological model is a complex parallel structure, which means a Maxell model in parallel with a Hooke model. The system is perturbed by a harmonic force  $F_0 \sin \omega t$ , the dynamic parameter being the amplitude of the forced steady-state vibration and the transmitted force to the base. The parametric dynamic characteristics that are drawn and analyzed are the transmissibility ratio  $T(\Omega, \delta)$  and the isolation degree  $I(\Omega, \delta)$ .*

**Keywords:** *steady-state vibration, structural damping, Zener model, transmissibility ratio, isolation degree*

## 1. INTRODUCERE

Sistemul mecanic elastic cu un grad de libertate din figura 1 este alcătuit din:

- ▶ masa  $m$  cu mișcare pe verticală;
- ▶ sistemul vâscoelastic de rezemare modelat ca un element de tip Zener.

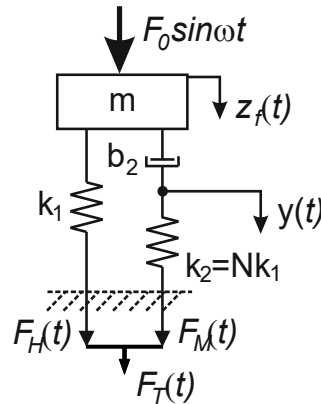


Fig. 1 Modelul simplificat al sistemului mecanic cu element reologic vâscoelastic Zener

La aplicarea pe verticală a forței perturbatoare  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ , masa  $m$  are o mișcare în regim forțat stabilizat descrisă de parametrul  $z_f(t)$ , iar forța  $F_T(t)$  transmisă bazei în regim dinamic depinde de:

- ▶ mărimea masei rezemate  $m$ ;
- ▶ caracteristicile elastice  $k_1$ ,  $k_2 = Nk_1$  și caracteristica de amortizare structurală  $b_2$  ale modelului Zener;
- ▶ parametrii forței perturbatoare armonice ( $F_0$ ,  $\omega$ ).

Pentru analiza răspunsului dinamic al sistemului precum și a transmisibilității și a gradului de izolare antivibratilă, parametrii cinematici necesari sunt:  $z_f$ ,  $\dot{z}_f$ ,  $\ddot{z}_f$ ,  $y$  și  $\dot{y}$ .

Transmiterea forței perturbatoare de la sistemul mecanic 1DOF la bază se face prin intermediul celor două modele reologice simple componente ale modelului Zener:

- ▶ forța transmisă prin intermediul modelului Hooke  $F_H(t) = k_1 \cdot z_f(t)$
- ▶ forța transmisă prin intermediul modelului Maxwell  $F_M(t) = k_2 \cdot y(t)$

$$\Rightarrow F_T(t) = F_H(t) + F_M(t) = k_1 z_f + k_2 y \quad (1)$$

## 2. FACTORUL DE TRANSMISIBILITATE ȘI GRADUL DE IZOLARE DINAMICĂ A VIBRAȚIILOR

Considerând un comportament liniar al modelelor componente ale elementului reologic Zener, ecuațiile diferențiale de mișcare ale sistemului 1DOF la solicitarea cu forța perturbatoare armonică  $F(t) = F_0 \sin \omega t$  se pot scrie [1] [2] [3]

$$\begin{cases} m\ddot{z} + b_2(\dot{z}_f - \dot{y}) + k_1 \cdot z_f = F_0 \sin \omega t \\ b_2(\dot{z}_f - \dot{y}) = k_2 \cdot y \\ F_T(t) = k_1 \cdot z_f + k_2 \cdot y \end{cases}, \quad (2)$$

unde deplasările  $z_f$ ,  $y$  și forța transmisă bazei  $F_T$  au variații armonice, cu aceeași pulsație ca a forței perturbatoare, defazate în urma acesteia cu  $\varphi_0$ ,  $\alpha$  și  $\beta$ :

$$z_f(t) = A_f \sin(\omega t - \varphi_0) \quad (3)$$

$$y(t) = A_Y \sin(\omega t - \alpha) \quad (4)$$

$$F_T(t) = F_{0T} \sin(\omega t - \beta) \quad (5)$$

Cu relațiile (3), (4) și (5) ale mărimilor armonice, forța transmisă bazei se poate scrie:

$$F_{0T} \sin(\omega t - \beta) = kA_f \sin(\omega t - \varphi_0) + NkA_Y \sin(\omega t - \alpha) \quad (6)$$

Amplitudinea forței armonice transmisă bazei  $F_{0T}$  se poate scrie [2] [3] [4]:

$$F_{0T} = F_0 \sqrt{\frac{N^2 + \delta^2(N+1)^2}{N^2(1-\Omega^2)^2 + \delta^2(N+1-\Omega^2)^2}}, \quad (7)$$

unde:  $p = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$  - pulsația proprie a sistemului elastic (model Hooke)

$\Omega = \frac{\omega}{p}$  - pulsația relativă

$\delta = \frac{b_2\omega}{k_2}$  ( $= 2\zeta\Omega$ ) - factorul de amortizare structurală/histeretică (modelul Maxwell)

$\zeta = \frac{b_2}{b_{cr}} = \frac{b_2}{2\sqrt{mk_2}}$  - fracțiunea din amortizarea critică (pentru modelul Maxwell

echivalent cu amortizare vâscoasă)

$N = \frac{k_2}{k_1}$  - raportul coeficienților de rigiditate

Amplitudinea forței armonice transmise bazei se poate scrie

$$F_{0T} = F_0 \cdot T(\Omega, \delta, N), \quad (8)$$

unde transmisibilitatea  $T(\Omega, \delta, N)$  are expresia:

Analiza transmisibilității și a gradului de izolare a vibrațiilor la sistemele mecanice cu amortizare structurală. Modelul zener

$$T(\Omega, \delta, N) = \sqrt{\frac{N^2 + \delta^2(N+1)^2}{N^2(1-\Omega^2)^2 + \delta^2(N+1-\Omega^2)^2}} \quad (9)$$

Gradul de izolare este definit în funcție de transmisibilitatea  $T$

$$I = 1 - T \quad (10)$$

### 3. DIAGrameLE FACTORULUI DE TRANSMISIBILITATE ȘI GRADULUI DE IZOLARE DINAMICĂ A VIBRAȚIILOR

În figurile 2-8 sunt prezentate variațiile parametrice ale transmisibilității în funcție de pulsația relativă  $\Omega$ . Parametrii luați în considerare sunt factorul de amortizare structurală  $\delta$  și raportul coeficienților de elasticitate  $N$ .

În figurile 9-14 sunt reprezentate variațiile gradului de izolare dinamică a vibrațiilor în funcție de pulsația relativă  $\Omega$ . Ca și în cazul transmisibilității, parametrii sunt factorul de amortizare structurală  $\delta$  și raportul coeficienților de elasticitate  $N$ .

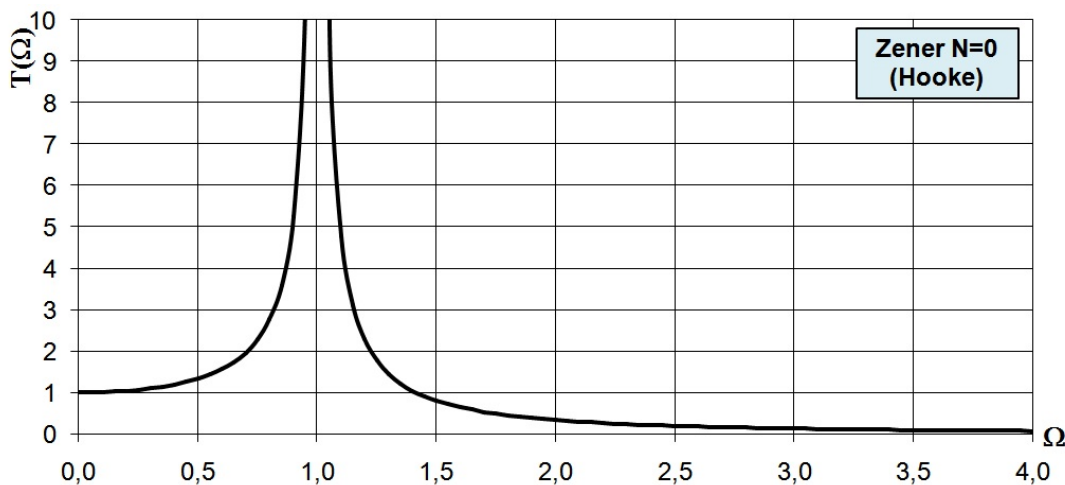


Fig. 2 Diagrama transmisibilității - Model Zener N=0 (Model Hooke)

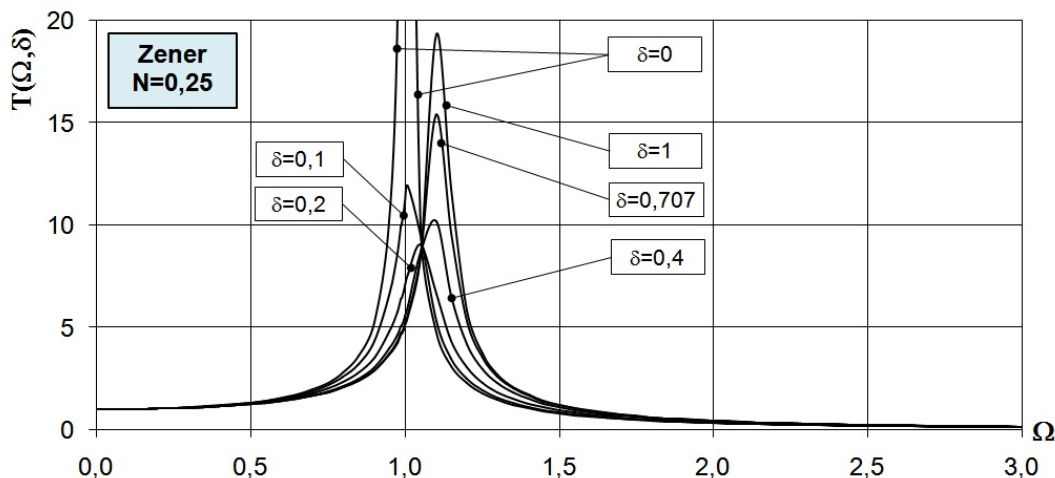


Fig. 3 Diagrama transmisibilității - Model Zener N=0,25

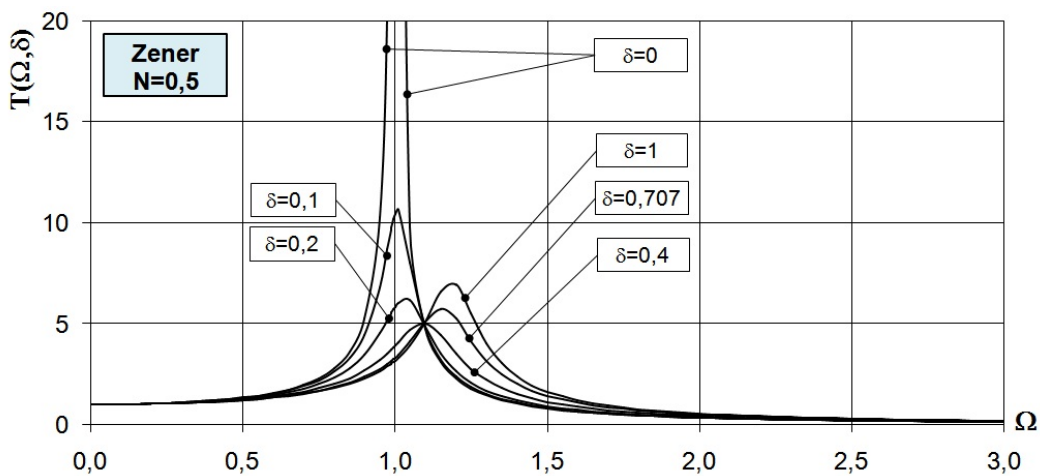


Fig. 4 Diagrama transmisibilității - Model Zener  $N=0,5$

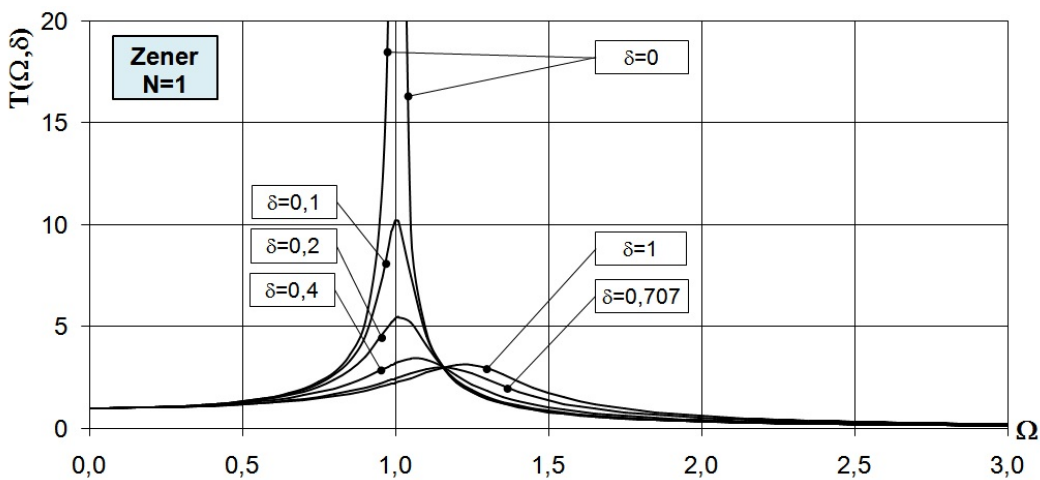


Fig. 5 Diagrama transmisibilității - Model Zener  $N=1$

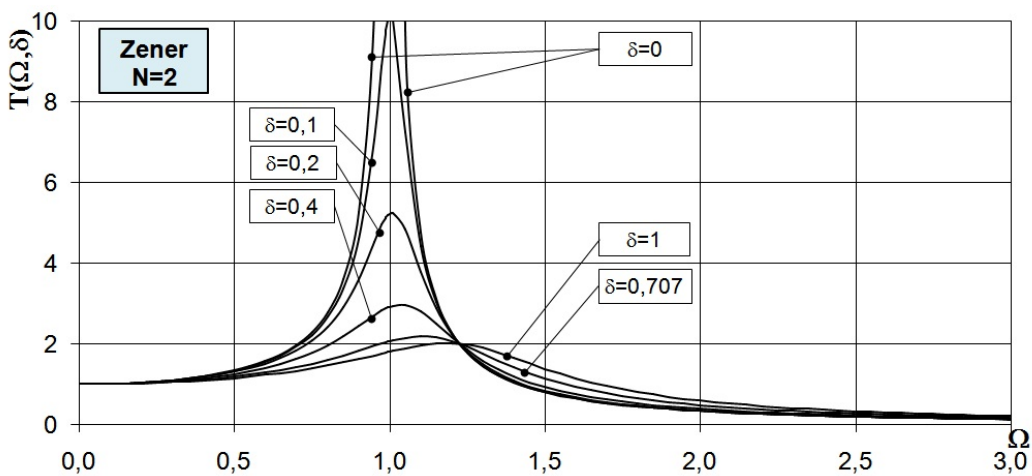


Fig. 6 Diagrama transmisibilității - Model Zener  $N=2$

Analiza transmisibilității și a gradului de izolare a vibrațiilor la sistemele mecanice cu amortizare structurală. Modelul zener

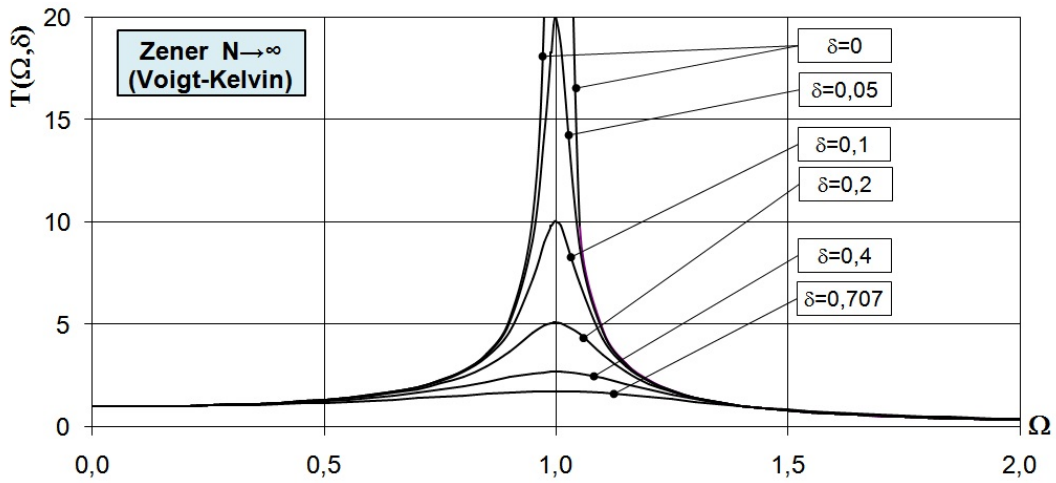


Fig. 7 Diagrama transmisibilității - Model Zener  $N \rightarrow \infty$  (model V-K)

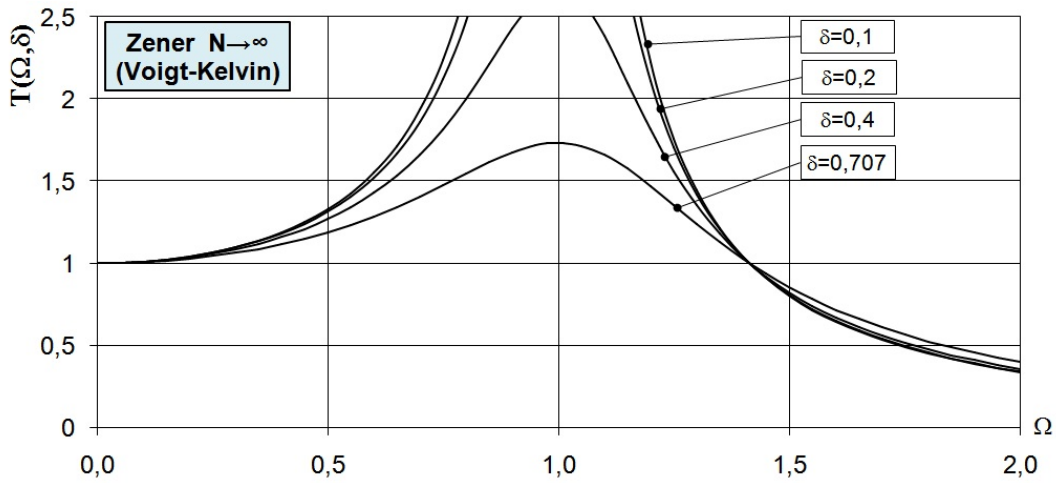


Fig. 8 Diagrama transmisibilității (detaliu) - Model Zener  $N \rightarrow \infty$  (model V-K)

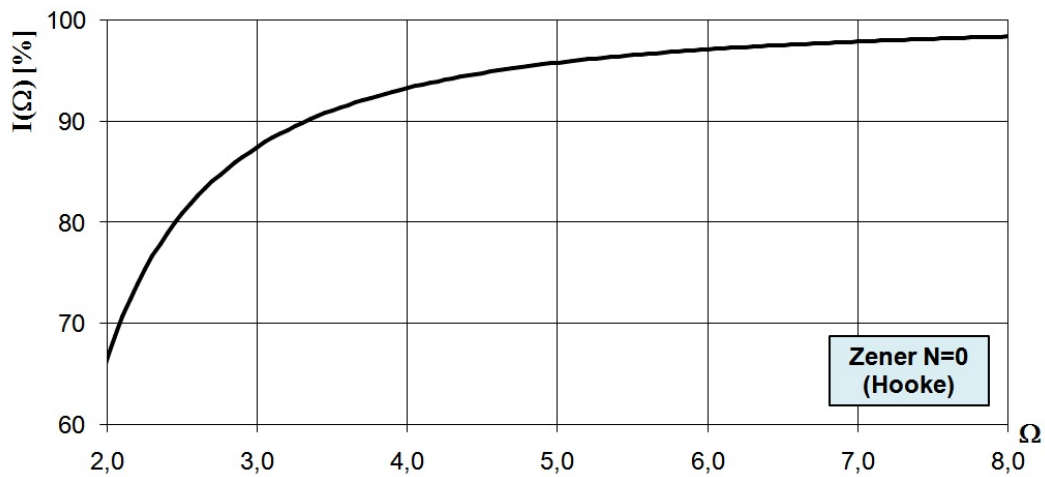


Fig. 9 Diagrama gradului de izolare - Model Zener  $N=0$  (Model Hooke)

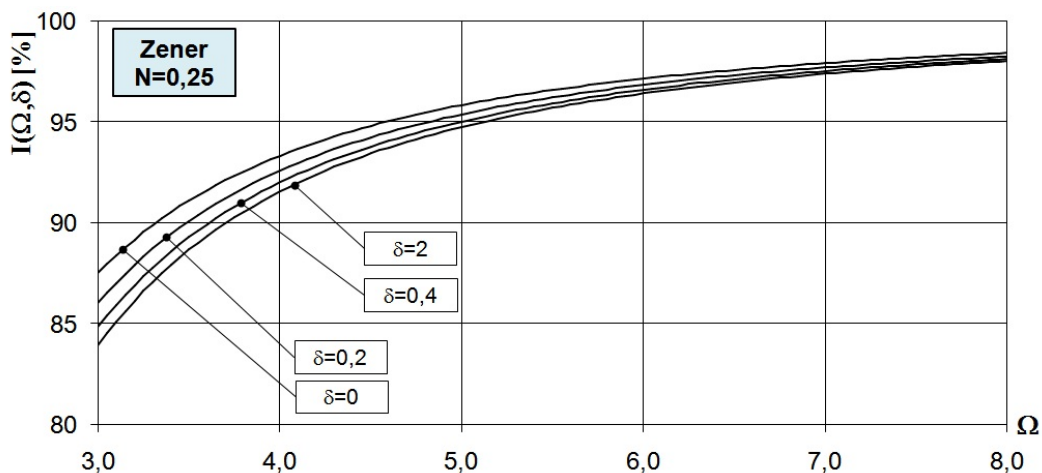


Fig. 10 Diagrama gradului de izolare - Model Zener N=0,25

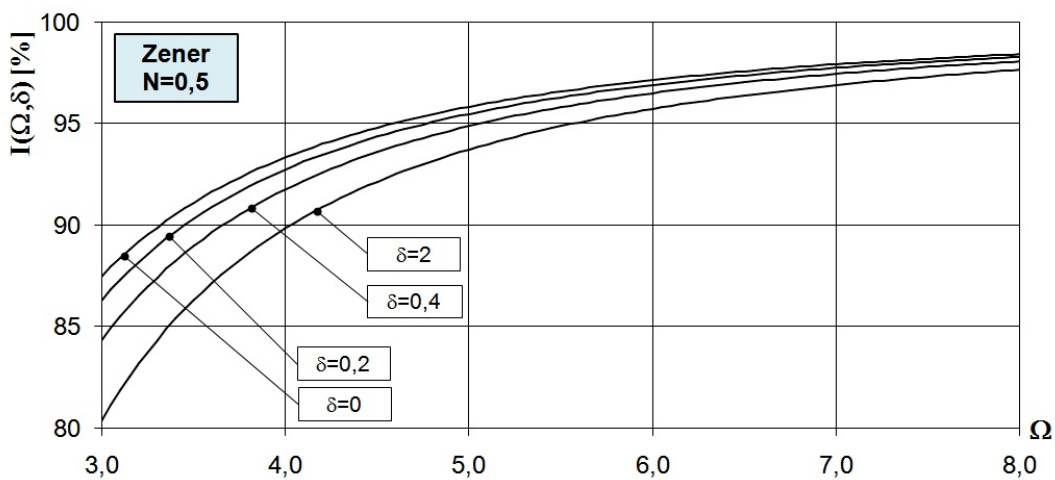


Fig. 11 Diagrama gradului de izolare - Model Zener N=0,5

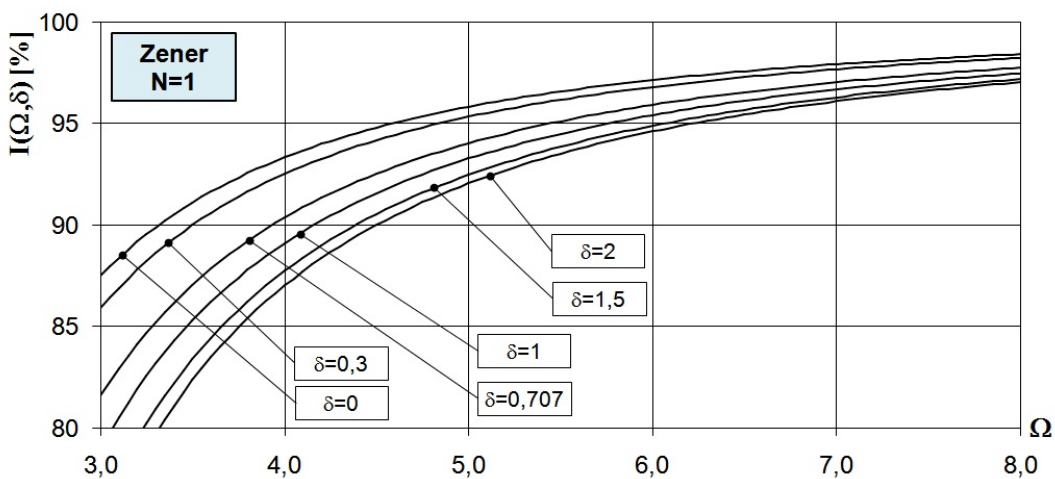


Fig. 12 Diagrama gradului de izolare - Model Zener N=1

Analiza transmisibilității și a gradului de izolare a vibrațiilor la sistemele mecanice cu amortizare structurală. Modelul zener

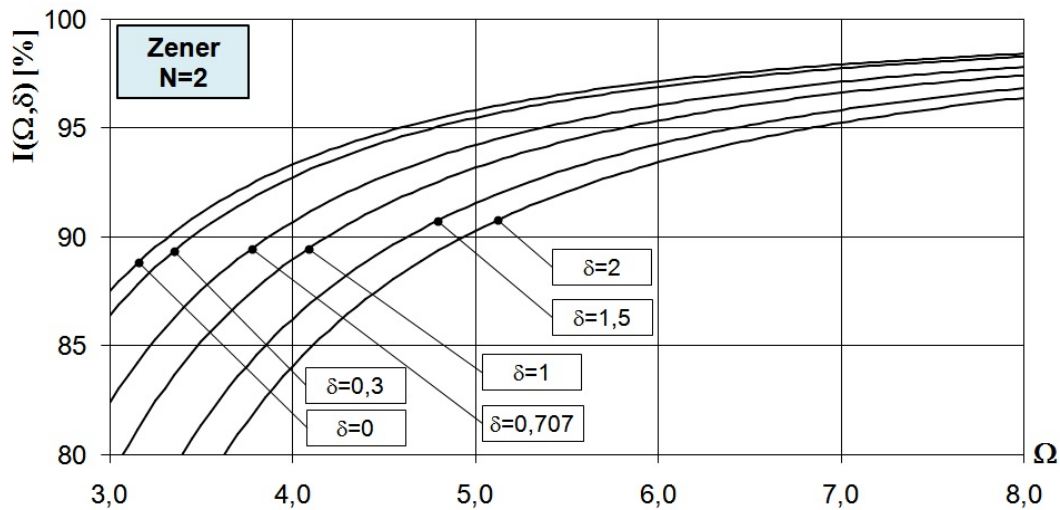


Fig. 13 Diagrama gradului de izolare - Model Zener N=2

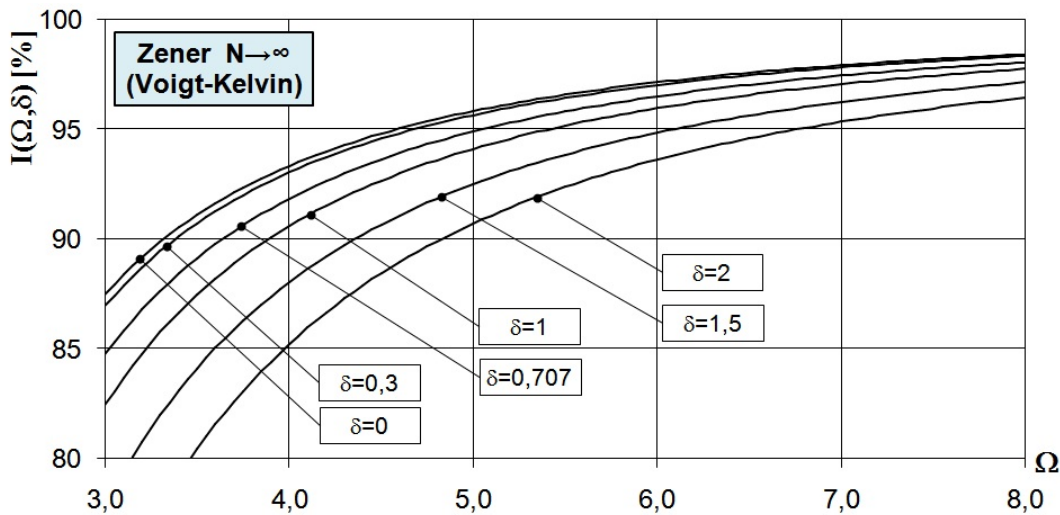


Fig. 14 Diagrama gradului de izolare - Model Zener N=2

## 6. CONCLUZII

1. Din analiza expresiei analitice a transmisibilității (9):

a) pentru  $N=0$  sau  $\delta=0$  (semnificând "anularea" modelului Maxwell), modelul Zener devine Hooke; variația transmisibilității în funcție de pulsația relativă este reprezentată în figura 2, iar expresia analitică este:

$$T_{N=0}(\Omega) \equiv T_{\delta=0}(\Omega) = \frac{1}{|1-\Omega^2|} \quad (11)$$

b) pentru  $N \rightarrow \infty$  (în modelul Maxwell elementul elastic este înlocuit cu o legătură rigidă, obținându-se astfel un model Newton), modelul Zener model devine un model Voigt-Kelvin;



variația transmisibilității funcție de pulsația relativă este reprezentată în figurile 7 și 8, iar expresia analitică a acesteia este:

$$T_{N \rightarrow \infty}(\Omega, \delta) = \sqrt{\frac{1 + \delta^2}{(1 - \Omega^2)^2 + \delta^2}} \quad (12)$$

c) pentru modelele reologice simple Hooke ( $N=0$  sau  $\delta=0$ ) și Voigt-Kelvin ( $N \rightarrow \infty$ ), valoarea maximă a transmisibilității se obține pentru  $\Omega=1$  (figura 2, figura 7);

d) pentru modelul reologic complex Zener, valorile maxime ale transmisibilității se obțin pentru  $\Omega > 1$ ; aceste maxime ale transmisibilității depind de raportul elasticităților  $N$ , (figurile 3-6);

2. Gradul de izolare dinamică a vibrațiilor depinde atât de pulsația relativă  $\Omega$  cât și de factorul de amortizare structurală  $\delta$ ; la aceeași pulsație relativă  $\Omega$ , gradul de izolare dinamică este mai mare cu cât amortizarea structurală este mai mică;

3. Pentru obținerea unor grade de izolare dinamică acceptabile ( $I > 90\%$ ), sistemele de rezemare vâscoelastice trebuie proiectate pentru a lucra la valori ale pulsației relative  $\Omega > 3,5 \dots 4,0$ .

## BIBLIOGRAFIE

- [1] **P. Bratu**, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Editura Tehnică, București, 2000
- [2] **N. Dragan**, *Dynamic analysis of the parameters of the mechanical systems with structural damping. Viscoelastic SLS model. Part 1: Amplitude factor*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XXVIII, ISSN 1224-5615, Galati, 2016, pp. 9-12
- [3] **N. Dragan**, *Dynamic analysis of the parameters of the mechanical systems with structural damping. Viscoelastic SLS model. Part 2: Transmissibility factor and isolation degree*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XXVIII, ISSN 1224-5615, Galati, 2016, pp. 13-16
- [4] **P. Bratu**, *Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje*, Editura Tehnică, București, 2000