# ANALIZA FACTORULUI DE AMPLIFICARE LA SISTEMELE MECANICE CU AMORTIZARE STRUCTURALĂ. MODELUL ZENER

## AMPLITUDE FACTOR ANALYSIS OF THE MECHANICAL SYSTEMS WITH STRUCTURAL DAMPING. ZENER MODEL

**Gianina Cornelia SPÂNU (ŞTEFAN)[1,2]**

[1]Universitatea "Dunărea de Jos" din Galaţi, Facultatea de Inginerie şi Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Maşinilor şi Echipamentelor Tehnologice - MECMET
[2]Universitatea "Dunărea de Jos" din Galaţi, Romania Şcoala Doctorală de Inginerie
e-mail: spanugianina@yahoo.com

***Rezumat:*** *Lucrarea propune o abordare a unui model dinamic 1DOF al unui sistem mecanic elastic cu amortizare structurală histeretică, model reologic Zener. Acest sistem este perturbat de o forță armonică, parametrul dinamic fiind amplitudinea vibrației forțate staționare. Caracteristica parametrică trasată și analizată este factorul de amplitudine. Acest studiu este util pentru validarea și/sau evaluarea materialelor vâscoase cu comportament specific modelului reologic Zener.*
***Cuvinte cheie:*** *vibraţii forţate staţionare, amortizare structurală (histeretică), model Zener, amplitudinea vibraţiilor forţate, factor de amplificare*

***Abstract:*** *The paper proposes an approach of a 1DOF dynamic model of an elastic mechanical system with hysteretic structural damping, rheologically modeled as a Zener model. This system is perturbated by a harmonic force, the dynamic parameter being the amplitude of the forced steady-state vibration. The parametric dynamic characteristic that is drawn and analyzed is the amplitude factor. This study is useful to validate and/or to assess the viscous materials with rheological Zener Model behavior.*
***Keywords:*** *steady-state vibration, hysteretic structural damping, Zener model, forced vibration amplitude, amplitude factor*

## 1. INTRODUCERE

Se consideră sistemul mecanic elastic cu un grad de libertate (1DOF) ca în figura 1. Masa m cu mişcare unidirecţională verticală, rezemată pe elementul vâscoelastic VEM, este perturbată pe direcţia de mişcare de forţa variabilă $F(t)$. În regim stabilizat, vibraţiile forţate
ale masei m sunt descrise de legea de mişcare $z_f(t)$.

Prin intermediul elementului vâscoelastic VEM, forţa inerţială a masei m este transmisă la bază/fundaţie. Forţa $F_T(t)$ transmisă bazei în regim dinamic depinde de [1] [2]
[3] [4] [5]:

►caracteristicile forţei perturbatoare $F(t)$;
►masa m;
►caracteristicile reologice ale elementului vâscoelastic VEM.

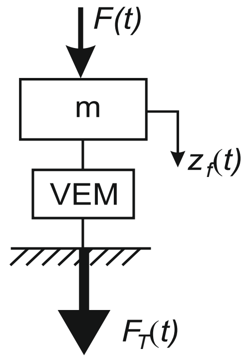


**Fig. 1** Modelul simplificat al sistemului mecanic 1DOF cu element de rezemare vâscoelastic [4]

## 2. MODELUL REOLOGIC ZENER

Modelele reologice simple şi modelele compuse/complexe sunt descrise în lucrările şi tratatele de vâscolelasticitate [5] [6]. Caracteristicile reologice ale diverselor modele pot fi descrise prin intermediul elementelor reologice simple (figura 2):
►elementul elastic liniar - modelul Hooke;
►elementul elastic vâscos - modelul Newton.

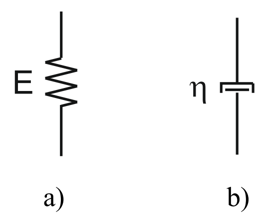


**Fig. 2** Elemente reologice simple [5] [6]: a)modelul Hooke, b)modelul Newton

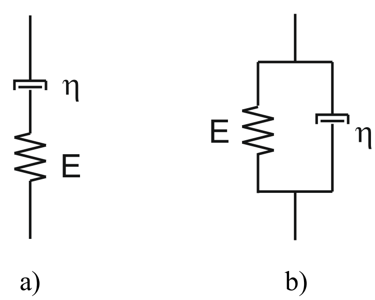


**Fig. 3** Modele reologice compuse [7] [8] [9]: a)modelul Maxwell, b)modelul Voigt-Kelvin

Modelele reologice complexe/compuse se pot obţine prin combinarea în serie sau/şi în paralel a modelelor Hooke şi Newton. Cele mai simple modele compuse sunt modelele

Maxwell şi modelul Voigt-Kelvin [7] [8] [9] (figura 3):
►modelul Maxwell - element elastic în serie cu element vâscos;
►modelul MVoigt-Kelvin - element elastic în paralel cu element vâscos.

Modelele reologice M (Maxwell) şi V-K (Voigt-Kelvin) nu pot descrie toate proprietăţile unui material vâscoelastic: modelul M nu poate descrie deformarea şi revenirea la viteze mici iar modelul V-K nu poate descrie detensionarea la încetarea forţei de acţionare. Modelul Zener, cunoscut şi ca model SLS (Standard Linear Solid), poate descrie ambele fenomene şi poate fi utilizat pentru modelarea şi analiza dinamică a sistemelor mecanice vâscoelastice. Modelul reologic Zener este compus dintr-un model Hooke legat în paralel cu un model Maxwell, ca în figura 4.

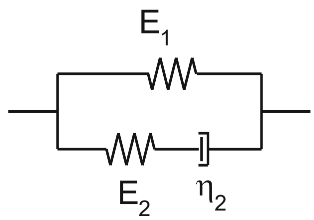


**Fig. 4** Modelul reologic Zener (model Hooke-Maxwell) [4] [5]

## 3. MODELUL DINAMIC AL SISTEMULUI MECANIC 1DOF CU ELEMENT VÂSCOLEASTIC DE TIP ZENER

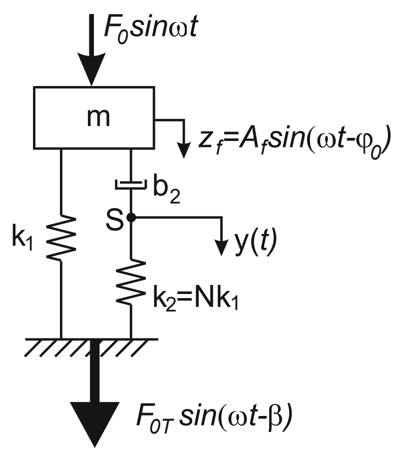


**Fig. 4** Modelul sistemului mecanic elastic 1DOF cu element vâscoelastic Zener [16] [17]

Se consideră un sistem mecanic elastic cu un singur grad de libertate ca în figura 5. Ecuaţiile diferenţiale de mişcare ale vibraţiilor forţate staţionare se pot scrie [10] [11] [12] [13]:

$$\begin{cases} m\ddot{z}_f + b_2\left(\dot{z}_f - \dot{y}\right) + k_1 z_f = F(t) \\ b_2\left(\dot{z}_f - \dot{y}\right) = k_2 y \end{cases} \tag{1}$$

Considerând o forţă perturbatoare armonică, $F(t) = F_0 \sin \omega t$, prima ecuaţie a sistemului (1) devine, după împărţirea cu *m*,

$$\ddot{z}_f + \frac{b_2}{m}\left(\dot{z}_f - \dot{y}\right) + \frac{k}{m} z_f = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \qquad (2)$$

sau

$$\ddot{z}_f + 2n\left(\dot{z}_f - \dot{y}\right) + p^2 z_f = h \sin \omega t \ , \qquad (3)$$

unde: $n = \frac{b_2}{2m}$ este factorul de amortizare (model Maxwell)

$p = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ - pulsaţia proprie a sistemului elastic (model Hooke)

$\zeta = \frac{b_2}{b_{cr}} = \frac{b_2}{2\sqrt{mk_2}}$ - fracţiunea din amortizarea critică

$\delta = \frac{b_2 \omega}{k_2} = 2\zeta\Omega$ - factorul de amortizare structurală (histeretică)

$\Omega = \frac{\omega}{p}$ - pulsaţia relativă

Considerând a 2-a ecuaţie a sistemului (1), adică ecuaţia de echilibru dinamic a punctului S, ecuaţia diferenţială de mişcare se poate scrie:

$$m\ddot{z}_f + k_2 y + k_1 z_f = F_0 \sin \omega t \qquad (4)$$

## 4. AMPLITUDINEA VIBRAŢIEI FORŢATE A SISTEMULUI 1DOF CU ELEMENT VÂSCOLEASTIC DE TIP ZENER

Deoarece sistemul mecanic 1DOF are elemente elastice şi vâscoase liniare, deplasarea $z_f(t)$ a masei m şi deplasarea $y(t)$ a punctului de legătură S a modelului Maxwell au variaţii armonice de forma

$$z_f(t) = A_f \sin\left(\omega t - \varphi_0\right) \qquad (5)$$

$$y(t) = A_Y \sin\left(\omega t - \alpha\right) \qquad (6)$$

unde: $A_f$ - amplitudinea deplasării masei m

$A_Y$ - amplitudinea deplasării punctului S

$\varphi_0$ - defazajul dintre $z_f(t)$ şi forţa $F(t)$

$\alpha$ - defazajul dintre $y(t)$ şi forţa $F(t)$

Cu expresiile armonice (5) şi (6) ale deplasărilor verticale, ecuaţia de mişcare devine:

$$-mA_f\omega^2 \sin(\omega t-\varphi_0)+k_2A_Y \sin(\omega t-\alpha)+k_1A_f \sin(\omega t-\varphi_0)=F_0 \sin\omega t \tag{7}$$

Ecuaţia de echilibru dinamic a puctului S se poate scrie:

$$b_2\omega A_f \cos(\omega t-\varphi_0)-b_2\omega A_Y \cos(\omega t-\alpha)=k_2A_Y \sin(\omega t-\alpha) \tag{8}$$

Ecuaţiile (7) şi (8) sunt echivalente cu patru ecuaţii trigonometrice, cu necunoscutele $(A_f,\varphi_0,A_Y,\alpha)$.

După rezolvarea sistemului de ecuaţii trigonometrice, se obţine expresia amplitudinii vibraţiei forţate a masei m rezemată pe elementul de tip Zener cu amortizare histeretică sub forma [4] [5] [14] [15]

$$A_f=\frac{F_0}{k_1}\sqrt{\frac{N^2+\delta^2}{N^2\left(1-\Omega^2\right)^2+\delta^2\left(N+1-\Omega^2\right)^2}} \tag{9}$$

sau

$$A_f=\frac{F_0}{k_1}\cdot A(\Omega,\delta,N)=A_{st}\cdot A(\Omega,\delta,N)\ , \tag{10}$$

unde: $A_{st}=\dfrac{F_0}{k_1}$ deformaţia elementului Hooke la aplicarea în regim static a forţei $F(t)\equiv F_0=ct.$

$A(\Omega,\delta,N)$ - factorul de amplificare al amplitudinei

$$A(\Omega,\delta,N)=\sqrt{\frac{N^2+\delta^2}{N^2\left(1-\Omega^2\right)^2+\delta^2\left(N+1-\Omega^2\right)^2}} \tag{11}$$

Relaţia parametrică (11) este utilizată pentru analiza şi reprezentarea grafică a factorului de amplificare $A(\Omega,\delta,N)$ funcţie de pulsaţia relativă $\Omega$, pentru diferite valori ale factorului de amortizare structurală $\delta$ şi rapoartelor elasticităţilor $N$.

## 5. DIAGRAMELE DE VARIAŢIE A FACTORULUI DE AMPLIFICARE PENTRU SISTEMUL CU AMORTIZARE STRUCTURALĂ DE TIP ZENER

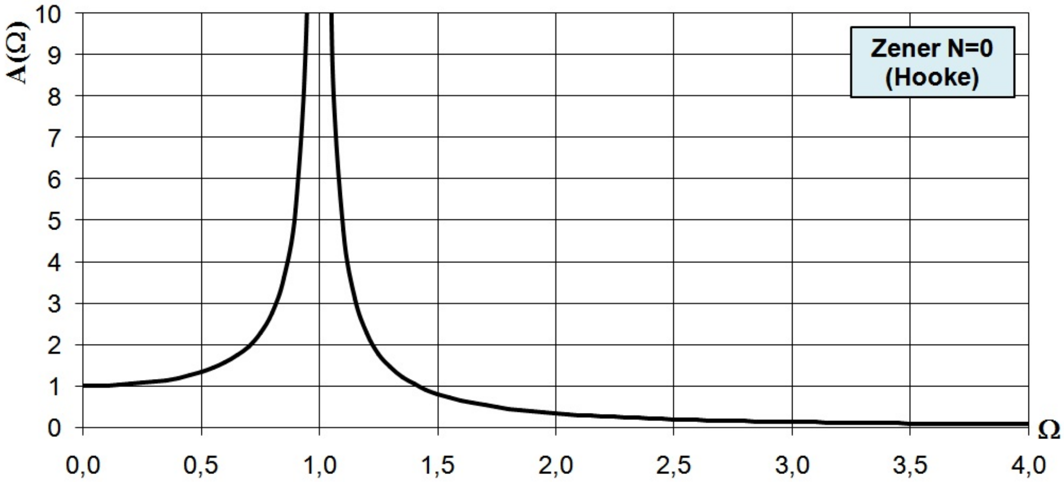


**Fig. 5** Diagrama factorului de amplificare - Model Zener N=0 (Model Hooke)

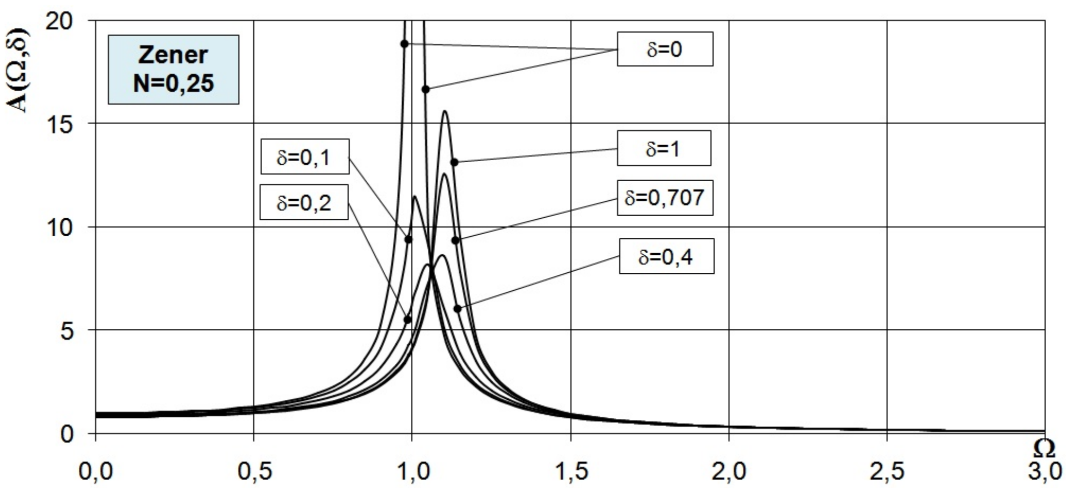


**Fig. 6** Diagrama factorului de amplificare - Model Zener N=0,25

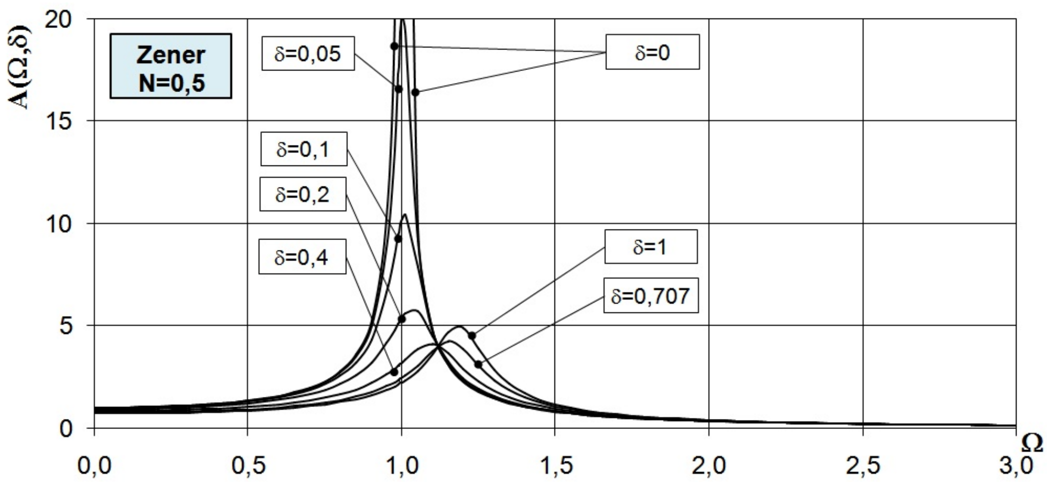


**Fig. 7** Diagrama factorului de amplificare - Model Zener N=0,50

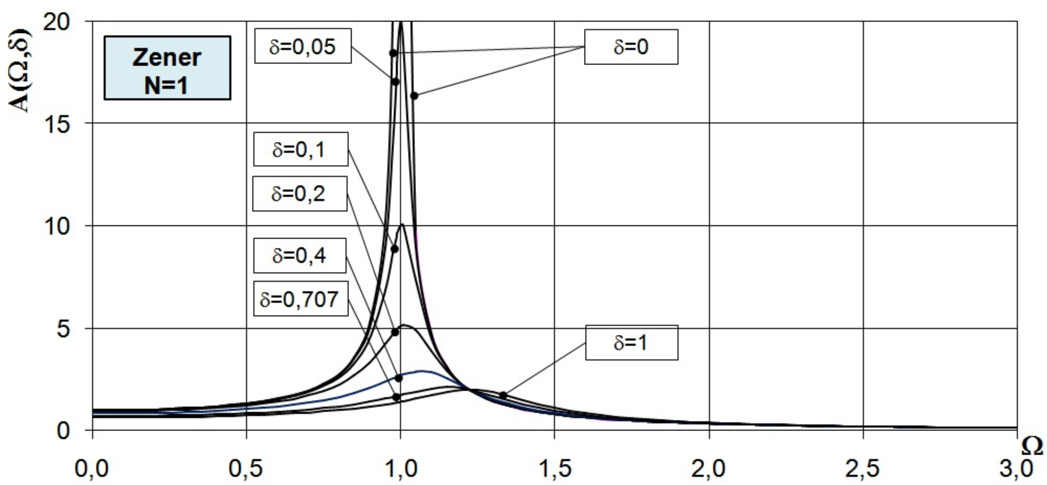


**Fig. 8** Diagrama factorului de amplificare - Model Zener N=1

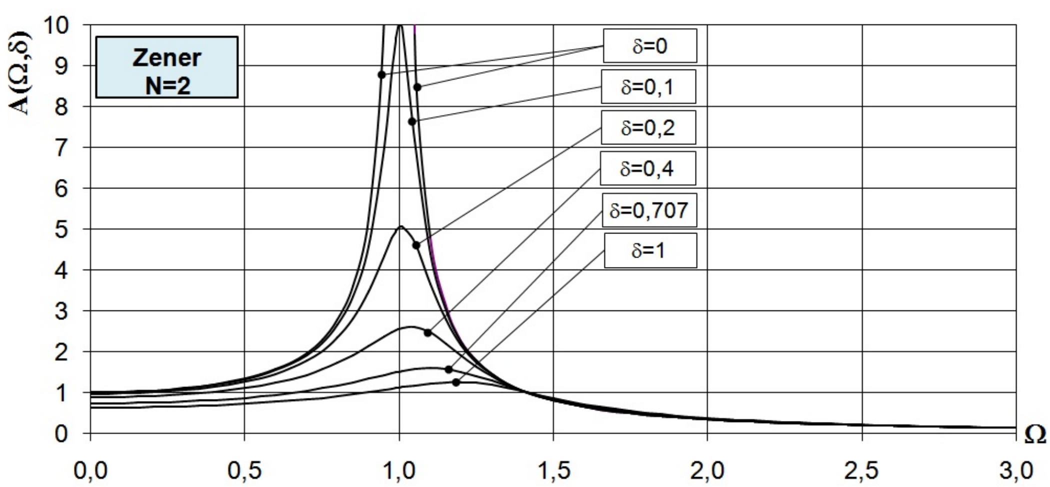


**Fig. 9** Diagrama factorului de amplificare - Model Zener N=2

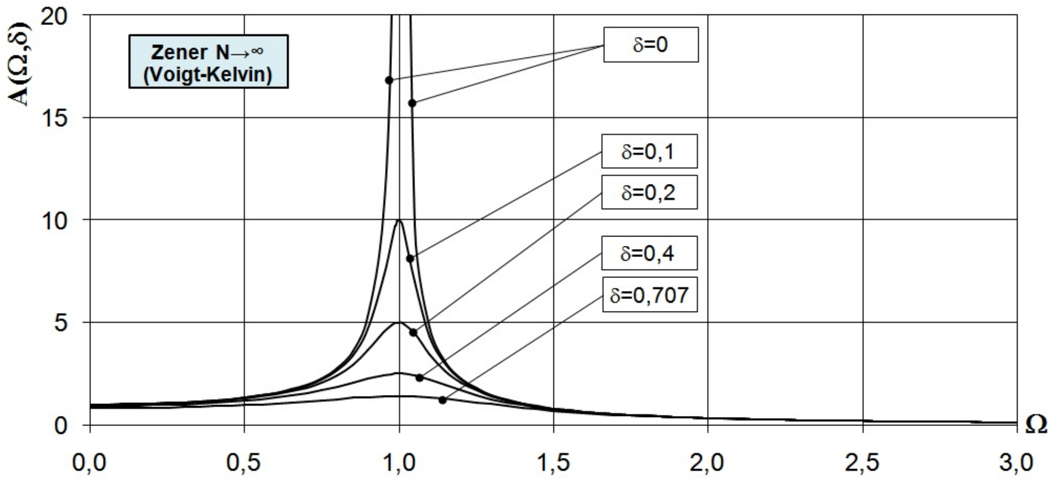


**Fig. 10** Diagrama factorului de amplificare - Model Zener N→∞ (Model V-K)

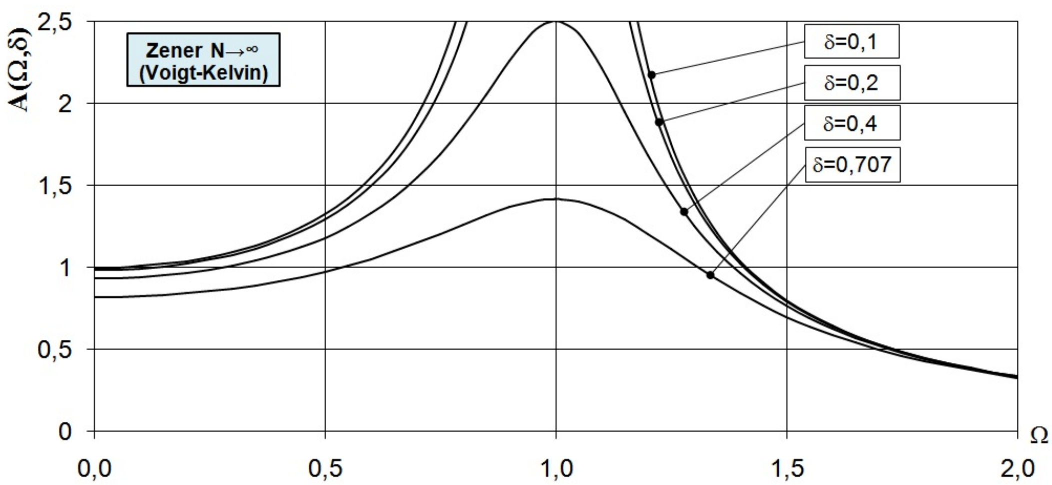


**Fig. 11** Diagrama factorului de amplificare (detaliu) - Model Zener N→∞

## 6. CONCLUZII

Din analiza relaţiei (11) a factorului de amplificare $A(\Omega, \delta, N)$, se pot concluziona următoarele:

1) pentru $N=0$ or $\delta=0$ (anularea modelului Maxwell), modelul Zener devine model Hooke; diagrama factorului de amplificare este reprezentată în figura 6; expresia matematică a factorului de amplificare este:

$$A_{N=0}(\Omega) = A_{\delta=0}(\Omega) = \frac{1}{\left|1-\Omega^2\right|} \tag{12}$$

b) pentru $N \to \infty$ (în modelul Maxwell arcul este înlocuit cu o legătură rigidă, obţinându-se un model Newton), modelul Zener model devine un model Voigt-Kelvin; diagrama de variaţie a factorului de amplificare este reprezentată în figurile 11 şi 12; expresia matematică a factorului de amplificare este:

$$A_{N \to \infty}(\Omega, \delta) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2 + \delta^2}} \tag{13}$$

c) pentru modelul reologic simplu Hooke, rezonanţa de amplitudine se obţine pentru $\Omega=1$ (fig. 6);
d) pentru modelul reologic Voigt-Kelvin, rezonanţa de amplitudine se obţine pentru $\Omega=1$ (fig. 11, fig. 12); pentru valori nenule ale factorului de amortizare structurală $\delta\neq 0$, valoarea factorului de amplificare la rezonanţă este:

$$A_{V-K}^{rez}(\delta) = \frac{1}{\delta} \tag{14}$$

e) pentru modelul reologic complex Zener, rezonanţa de amplitudine se obţine pentru valori supraunitare ale pulsaţiei relative $\Omega>1$; valoarea factorului de amplificare la rezonanţă depinde atât de mărimea amortizării histeretice $\delta$ cât şi de mărimea raportul elasticităţilor $N$ (figurile 7-10).
f) rezultatele obţinute pentru modelul reologic Zener cu amortizare histeretică (dependentă liniar de pulsaţia a forţei perturbatoare armonice $\delta = 2\zeta\Omega$) sunt similare cu cele ale modelului SLS cu amortizare vâscoasă [16] [17].

## BIBLIOGRAFIE

[1] **G.C. Spânu (Ştefan), N. Drăgan**, *Analiza transmisibilităţii şi a gradului de izolare a vibraţiilor la sistemele mecanice cu amortizare structurală. Modelul Zener*, Sinteze de Mecanică Teoretică şi Aplicată, Vol. 8 (2017) nr. 4, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, Bucureşti, 2017
[2] **P. Bratu**, *Vibraţii mecanice. Teorie. Aplicaţii tehnice*, Ed. Impuls, Bucureşti, 1998
[3] **P. Bratu**, *Vibraţiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 2000
[4] **N. Dragan**, *Dynamic analisys of the parameters of the mechanical systems with structural damping. Viscoelastic SLS model. Part 1: Amplitude factor*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XXVIII, ISSN 1224-5615, Galati, 2016
[5] **N. Dragan**, *Dynamic analisys of the parameters of the mechanical systems with structural damping. Viscoelastic SLS model. Part 2: Transmissibility factor and isolation degree*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XXVIII, ISSN 1224-5615, Galati, 2016
[5] **W.Flugge**, *Viscoelasticity*, Springer, New York, 1975
[6] **R.M. Christensen**, *Theory of Viscoelasticity*, Dover Publications Inc., New York, 2010
[7] **N. Dragan**, *Considerations on the composite neoprene vibration isolators used for the mechanical systems bearings. The dynamics of the non-linear models*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI) NR2, ISSN 1583-0691, 2012
[8] **N. Dragan**, *Modal calculus of the reinforced concrete bridges modeled as a rigid solid beared on viscous elastic neoprene supports*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV

Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVI, ISSN 1224-5615, Galaţi, 2010
[9] **P. Bratu, N. Dragan**, *Theoretical and numerical considerations on the composite neoprene used at vibration and shock isolations isolators*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVI, ISSN 1224-5615, Galaţi, 2010
[10] **Gh. Ene**, **C. Pavel**, *Introducere în tehnica izolării vibraţiilor şi a zgomotului*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2012
[11] **Gh. Buzdugan**, **L. Fetcu**, **M. Radeş**, *Vibraţii mecanice*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982
[12] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems with nonlinear damping. Power and amplitude numerical analysis*, Proceedings of the 10$^{th}$ WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009
[13] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems Dynamics of the Rigid Body with Structural Symmetries. Modal Analysis. Transmitted Forces and Moments*, Proceedings of the 10$^{th}$ WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009
[14] **P. Bratu**, *Analiza structurilor elastice. Comportarea la acțiuni statice și dinamice*, Ed. Impuls, București, 2011
[15] **P. Bratu**, *Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje*, Ed. Tehnică, București, 1990
[16] **N. Dragan**, *Rheological SLS model. Dynamic parameters of the systems with viscous damping. Part 1: Amplitude factor*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 1 Issue XXIX, ISSN 1224-5615, Galati, 2017
[17] **N. Dragan**, *Rheological SLS model. Dynamic parameters of the systems with viscous damping. Part 2: Transmissibility factor and isolation degree*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 1 Issue XXIX, ISSN 1224-5615, Galati, 2017