

ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMELOR MECANICE CU REAZEME ELASTOMERICE. MODELUL VOIGT-KELVIN

DYNAMIC ANALYSIS OF THE MECHANICAL SYSTEMS WITH ELASTOMERIC BEARINGS. VOIGT-KELVIN MODEL

Nicușor DRĂGAN¹

¹Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Romania, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET
e-mail: ndragan@ugal.ro

Rezumat: *Articolul propune o analiză a gradului de izolare a reazemelor elastomerice în cazul modelului vâscoelastic complex Voigt-Kelvin.*

Cuvinte cheie: *analiză dinamică, grad de izolare dinamică, reazeme elastomerice, model Voigt-Kelvin*

Abstract: *The paper proposes an analysis of the dynamic insulation degree of the elastomeric bearings modeled as viscous-elastic Voigt-Kelvin model.*

Keywords: *dynamic analysis, dynamic insulation degree, elastomeric bearings, Voigt-Kelvin model*

1. INTRODUCERE

Elastomerul reprezintă un polimer sintetic (macromoleculă sau mai multe molecule legate între ele prin legături chimice și forțe intermoleculare slabe și foarte slabe) care are proprietăți plastice și elastice asemănătoare cu ale cauciucului natural. În figura 1 este prezentată schematic structura unui polimer, în stare netensionată (a) și în stare tensionată (b).

Principala caracteristică a materialelor elastomerice este alungirea ridicată și flexibilitatea sau elasticitatea, înaintea ruperii sau fisurării lor. Materialele elastomerice au următoarele proprietăți: nu se pot topi (înainte de topire trec într-o stare gazoasă), își măresc volumul (se umflă) în prezența anumitor solvenți, sunt (în general) insolubile, sunt flexibile și elastice, au rezistență la fluaj mai mică decât materialele termoplastice.

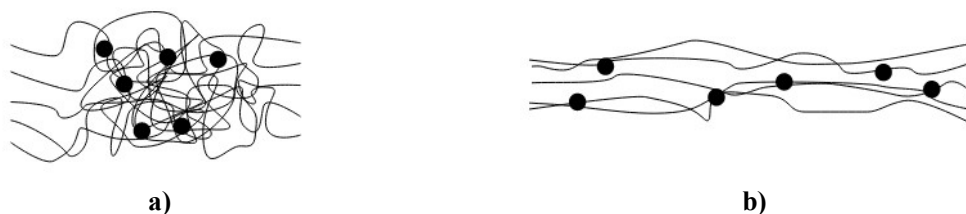


Fig. 1 Reprezentare simplificată a structurii moleculare a unui elastomer [1] [2]

Tipuri de materiale elastomerice: cauciucul natural, poliuretani, polibutadiena (pentru anvelopele vehiculelor), neoprenul, siliconul.

Reazemele elastomerice sunt materiale vâsco-elastice (combină proprietățile elastice

cu cele vâscoase) fiind alcătuite din elemente elastice (izolatori) și elemente de amortizare vâscoasă (amortizori). Reazemele elastomerice (figura 2) se folosesc pentru realizarea izolatoarelor antivibratili și au rolul de a reduce vibrațiile transmise produse de o sursă excitatoare (forță perturbatoare) către elementul receptor perturbat (sediul forței transmise).

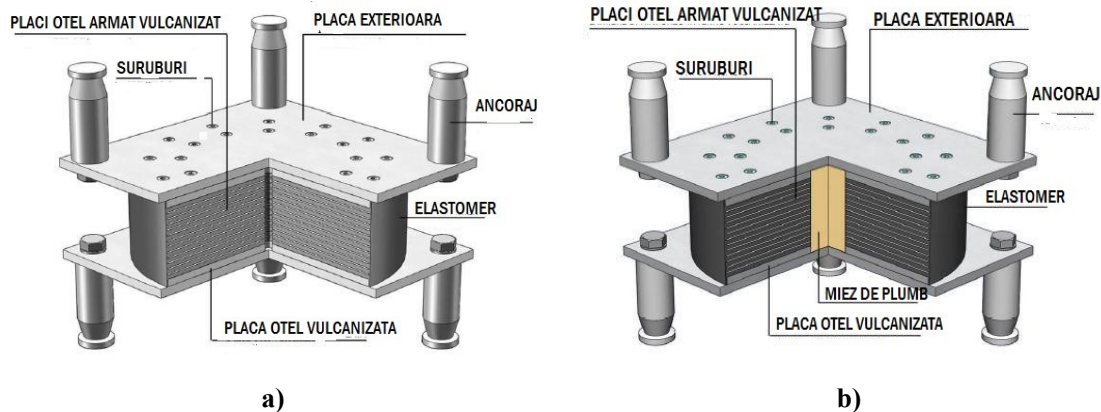


Fig. 2 Exemple de reazeme elastomerice [3]

2. MATERIALE ELASTOMERICE. AVANTAJE ȘI DEZAVANTAJE

Datorită proprietăților și caracteristicilor mecanice specifice, materialele elastomerice prezintă următoarele **avantaje** în utilizare:

- ▶ cauciucul se deformează mult, putând să preia prin șoc un lucru mecanic cu valoarea de peste patru ori mai mare decât arcurile din oțel (datorită valorilor foarte reduse ale modului de elasticitate la compresiune, $E=1,0\div 10,0$ MPa);
- ▶ sistemele de rezemare formate din elementele din cauciuc se caracterizează prin valori reduse ale pulsațiilor proprii datorită constantelor elastice foarte mici;
- ▶ factorul de amortizare este mult mai mare la cauciuc decât la oțel, permițând elementelor antivibratili din cauciuc să disipeze până la 30÷35% din energia totală a vibrațiilor;
- ▶ datorită valorilor mari ale amortizării, amplitudinile vibrațiilor la rezonanță ale mașinilor rezemate pe elemente elastice din cauciuc au valori de numai 10÷20% din valorile amplitudinilor mașinilor rezemate pe arcuri din oțel, astfel încât mașinile rezemate pe elemente din cauciuc, care funcționează în postrezonanță (și trec atât la pornire, cât și la oprire prin zona de rezonanță), nu mai necesită și elemente de amortizare (așa cum necesită aceleași mașini rezemate pe arcuri din oțel);
- ▶ viteza de propagare a sunetului prin cauciuc este foarte redusă, 45 m/s (0,9% din viteza de propagare prin oțel, 14 % din viteza de propagare prin aer); cauciucul are o capacitate mare de amortizare a zgomotelor, astfel încât folosirea tampoanelor de cauciuc în locul arcurilor de oțel, pentru rezemarea mașinilor cu turații mari conduce la atenuarea semnificativă a

zgomotelor produse în timpul funcționării;

- ▶ gabarit și greutate mai reduse ale elementelor elastice din cauciuc în comparație cu arcurile metalice (la aceeași eficiență a izolării vibrațiilor);
- ▶ cauciucul are reziliență mare în raport cu oțelul;
- ▶ sistemele elastice de amortizare realizate din elemente de cauciuc au o stabilitate mai mare decât cele realizate din arcuri de oțel;
- ▶ elementele elastice din cauciuc nu necesită întreținere în exploatare;
- ▶ elementele elastice din cauciuc sunt capabile să suporte solicitări ridicate de scurtă durată (suprasarcini accidentale);
- ▶ izolațiile antivibratorii realizate din elemente de cauciuc se caracterizează prin simplitate constructivă și greutate redusă.

Dezavantajele utilizării elementelor antivibratorii din cauciuc:

- ▶ elementele din cauciuc se degradează și își pierd proprietățile elastice sub influența agenților atmosferici sau a unor impurități agresive (uleiuri, solvenți, acizi etc.); pentru a evita acțiunea nocivă a acestor agenți agresivi sunt necesare măsuri adecvate de protecție;
- ▶ cauciucul "îmbătrânește" pe măsura trecerii timpului și se degradează pierzându-și proprietățile elastice; din acest motiv, la mașinile cu durată mare de serviciu trebuie prevăzute posibilități constructive pentru înlocuirea elementelor elastice degradate din cauciuc;
- ▶ la elementele antivibratorii din cauciuc relația dintre tensiuni și deformații este neliniară, iar valorile constantelor elastice variază mult în funcție de compoziție;
- ▶ temperatura de utilizare a izolatoarelor de vibrații din cauciuc este limitată; de regulă, elementele antivibratorii din cauciuc natural își păstrează caracteristicile elastice în intervalul de temperatură $-40 \div +200^{\circ}\text{C}$, cele din cauciuc sintetic în intervalul $-20 \div +80^{\circ}\text{C}$, iar cele din cauciuc siliconic în intervalul $-75 \div +200^{\circ}\text{C}$.

3. MODELE REOLOGICE. GRAD DE IZOLARE DINAMICĂ

Izolarea vibrațiilor mașinilor și echipamentelor se realizează cu ajutorul elementelor antivibratorii (arcuri, elemente elastice din cauciuc etc.) dispuse într-o varietate constructivă diversă. Comportarea reazemelor elastomerice poate fi descrisă cu ajutorul unor modele reologice formate din arcuri, amortizoare și elemente de frecare uscată [4]. Modelele reologice utilizate frecvent pentru reprezentarea elementelor antivibratorii din cauciuc sunt: modelul elastic Hooke, modelul vâscoelastic Voigt-Kelvin, modelul vâscoelastic Maxwell, modelul histeretic și modelul vâscoelastic ereditar Zener [5].

În urma stabilirii ecuațiilor diferențiale ale mișcării pentru fiecare model în parte și a

identificării soluțiilor sistemelor de ecuații se poate defini răspunsul dinamic în deplasare instantanee și gradul de izolare al vibrațiilor.

Parametrii care stabilesc performanțele de izolare a vibrațiilor sunt transmisibilitatea T a vibrațiilor și gradul de izolare I . Gradul de izolare a vibrațiilor transmise exprimă reducerea procentuală a vibrațiilor [5]. Cei doi parametri sunt complementari, iar relația de legătură este dată de:

$$I = (1 - T) \cdot 100 \quad [\%] \quad (1)$$

4. ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMELOR DE IZOLARE ANTIVIBRATILĂ CU ELEMENTE DE TIP VOIGT-KELVIN

Sistemele de izolare antivibratilă cele mai răspândite sunt schematizate ca modele dinamice ale unui sistem mecanic liniar 1DOF caracterizat prin [5]:

- ▶ identificarea sistemului se poate realiza prin analiza răspunsului dinamic la o excitație cinematică sau dinamică aplicată din exterior;
- ▶ natura excitației exterioare și a răspunsului dinamic sunt factorii determinanți pentru punerea în valoare a "mecanismelor interne" de disipare a energiei;
- ▶ transmisibilitatea excitației și respectiv gradul de izolare sunt parametri dependenți de sistemul elastic, disipativ și inerțial, în strânsă corelație cu factorul perturbator aplicat din exterior (deplasare sau forță armonică);
- ▶ energia disipată este caracteristică numai pentru elementul vâscos și depinde atât de regimul mișcării (vibrații proprii libere, vibrații forțate staționare) cât și caracteristicile răspunsului dinamic exprimate în amplitudinea și pulsația.

Sistemele liniare disipative vâscoase sunt alcătuite, în diverse combinații, din cel puțin un element elastic și un element disipativ vâscos Newton. Pentru exemplificare se consideră un sistem 1DOF de masă m rezemat vâsco-elastic pe un element de tip Voigt-Kelvin asupra căruia acționează forța perturbatoare $F(t)$ ca în figura 3.

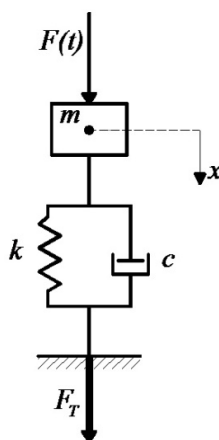


Fig. 3 Model dinamic 1DOF cu rezemare vâscoelastică cu element V-K [4]

Considerând o forță perturbatoare armonică $F(t) = F_0 \sin \omega t$, de amplitudine F_0 și pulsație ω , ecuația diferențială de mișcare a sistemului este

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t, \quad (2)$$

unde x, \dot{x}, \ddot{x} sunt parametrii cinematici ai mișcării pe verticală ai masei m

$m\ddot{x}$ - forța de inerție

$c\dot{x}$ - forța de amortizare

kx - forța elastică

Ecuația de mișcare (2) se mai poate scrie

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t, \quad (3)$$

unde $n = \frac{c}{2m}$ este factorul de amortizare vâscoasă

$p = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - pulsația proprie a sistemului mecanic elastic 1DOF

Soluția ecuației (3) este formată din doi termeni, unul reprezentând vibrația liberă amortizată – care încetează după un scurt timp – și altul, reprezentând vibrația forțată [5]

$$x_f(t) = A_f \sin(\omega t - \varphi_0), \quad (4)$$

unde A_f este amplitudinea vibrației forțate armonice.

Amplitudinea vibrației forțate poate fi scrisă în funcție de deplasarea $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$ a masei m la aplicarea în regim static a forței F_0 , pulsația relativă $\Omega = \frac{\omega}{p}$ și de factorul de

amplificare dinamică $A\left(\Omega, \frac{2n}{p}\right)$ astfel:

$$A_f = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{p}\right)^2 \left(\frac{\omega}{p}\right)^2}} = \delta_{st} \cdot A\left(\Omega, \frac{2n}{p}\right) \quad (5)$$

$$A\left(\Omega, \frac{2n}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \Omega^2\right)^2 + \left(\frac{2n}{p}\right)^2 \Omega^2}} \quad (6)$$

5. GRADUL DE IZOLARE DINAMICĂ A SISTEMELOR 1DOF CU ELEMENT VÂSCOELASTIC VOIGT-KELVIN

Se consideră schematizarea modelului sistemului mecanic 1DOF din figura 4 cu element vâscoelastic V-K: două elemente simple legate în paralel, un element cu comportare elastică de tip Hooke (arc) și un element cu comportare vâscoasă de tip Newton (amortizor).

Se consideră două cazuri distincte de amortizare:

1.amortizare liniar vâscoasă, descrisă de factorul de amortizare n sau de fracțiunea din amortizarea critică ζ :

$$\zeta = \frac{n}{p} = \frac{c}{2mp} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{c_{cr}} \quad (7)$$

$$\Rightarrow A(\Omega, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 - 4\zeta^2\Omega^2}} \quad (8)$$

2.amortizare structurală histeretică descrisă de coeficientul δ

$$\delta = \frac{c\omega}{k} = \frac{2n}{p} \cdot \frac{\omega}{p} = \frac{2n}{p}\Omega \quad (9)$$

$$\Rightarrow A(\Omega, \delta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + \delta^2}} \quad (10)$$

În tabelul 1 este descris răspunsul dinamic în deplasare instantanee și gradul de izolare a vibrațiilor pentru modelul Voigt - Kelvin cu masă, excitat din exterior cu o forță armonică.

Tabel 1. Răspunsul dinamic în deplasare instantanee și gradul de izolare a vibrațiilor pentru modelul V-K cu masă, excitat din exterior cu o forță armonică

Cazuri de amortizare	Amortizare vâscoasă ζ	Amortizare histeretică δ
Ecuția de mișcare	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$	
Amplitudinea vibrației forțate	$A_f = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$	$A_f = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + \delta^2}}$
Factorul de amplificare	$A(\Omega, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$	$A(\Omega, \delta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + \delta^2}}$
Amplitudinea forței transmise	$F_{0T} = F_0 \sqrt{\frac{1+4\zeta^2\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$	$F_{0T} = F_0 \sqrt{\frac{1+\delta^2}{(1-\Omega^2)^2 + \delta^2}}$
Transmisibilitatea	$T(\Omega, \zeta) = \sqrt{\frac{1+4\zeta^2\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$	$T(\Omega, \delta) = F_0 \sqrt{\frac{1+\delta^2}{(1-\Omega^2)^2 + \delta^2}}$

6. VARIAȚIA FACTORULUI DE AMPLIFICARE ȘI A TRANSMISIBILITĂȚII ÎN CAZUL AMORTIZĂRII VÂSCOASE ζ

În figura 4 sunt reprezentate variațiile factorului de amplificare funcție de pulsația relativă Ω (considerată variabilă), pentru anumite valori ale fracțiunii din amortizarea critică ζ . Cu cât amortizarea vâscoasă este mai mare, cu atât răspunsul sistemului în regim dinamic este cu amplitudine mai scăzută. Pentru sistemul cvasielastic ($\zeta \rightarrow 0$), rezonanța de amplitudine are loc pentru $\Omega \approx 1$, factorul de amplificare fiind $A(\zeta) \approx \frac{1}{2\zeta}$.

În figurile 5 și 6 sunt reprezentate variațiile factorului de amplificare și a transmisibilității funcție de pulsația relativă Ω (considerată variabilă) pentru anumite valori ale fracțiunii din amortizarea critică ζ (cazul amortizării vâscoase). În figurile 7 și 8 sunt reprezentate variațiile factorului de amplificare și a transmisibilității funcție de pulsația relativă Ω pentru anumite valori ale amortizării hysteretice δ .

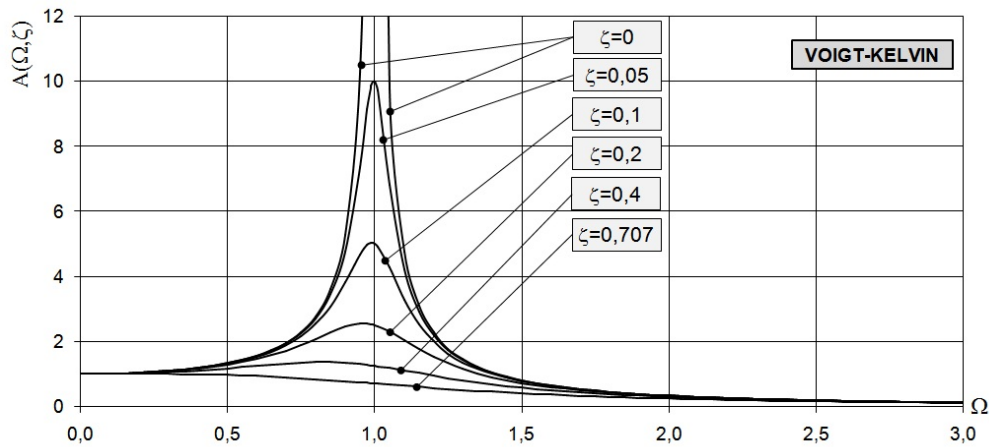


Fig. 4 Variația factorului de amplificare $A(\Omega, \zeta)$ în cazul amortizării vâscoase ζ

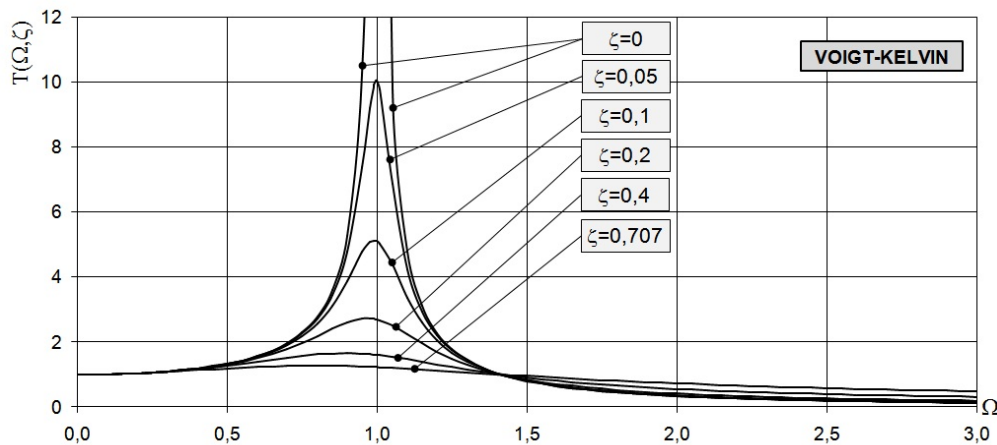


Fig. 5 Variația transmisibilității $T(\Omega, \zeta)$ în cazul amortizării vâscoase ζ

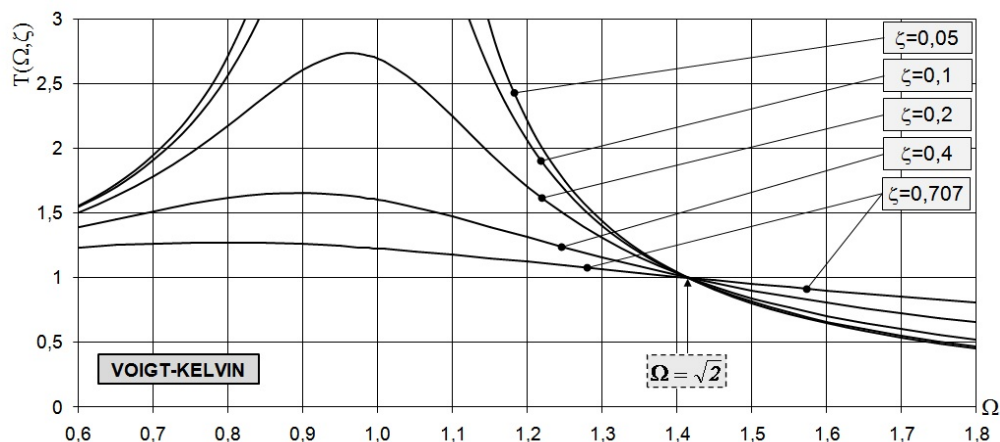


Fig. 6 Variația transmisibilității $T(\Omega, \zeta)$ în cazul amortizării vâscoase ζ (detaliu)

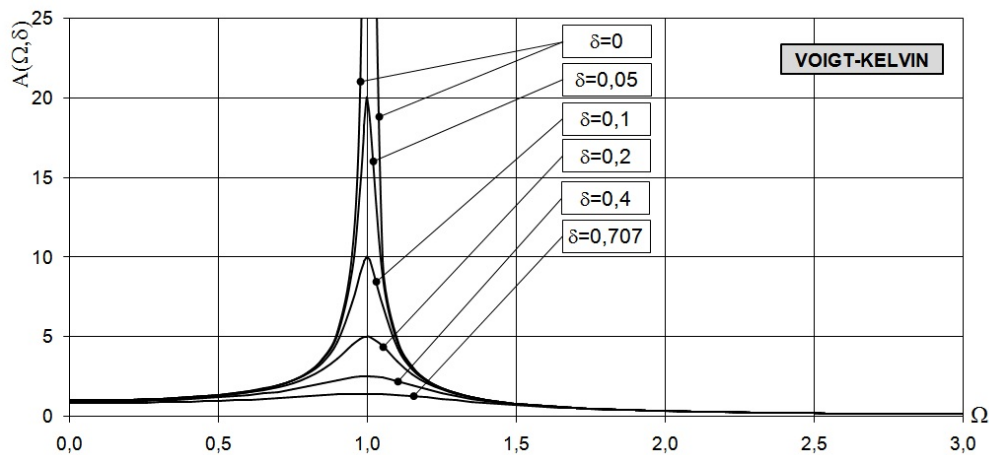


Fig. 7 Variația factorului de amplificare $A(\Omega, \delta)$ în cazul amortizării histeretice δ

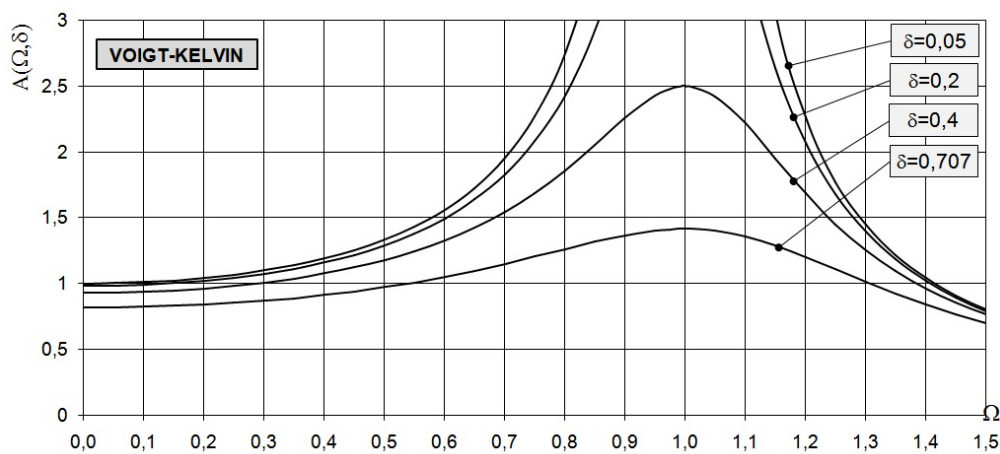


Fig. 8 Variația factorului de amplificare $A(\Omega, \delta)$ în cazul amortizării histeretice δ (detaliu)

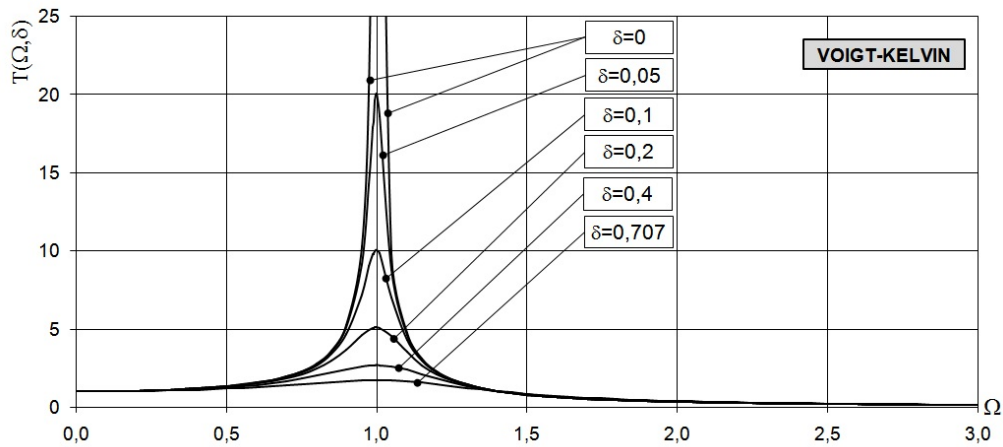


Fig. 9 Variația transmisibilității $T(\Omega, \delta)$ în cazul amortizării hysteretice δ

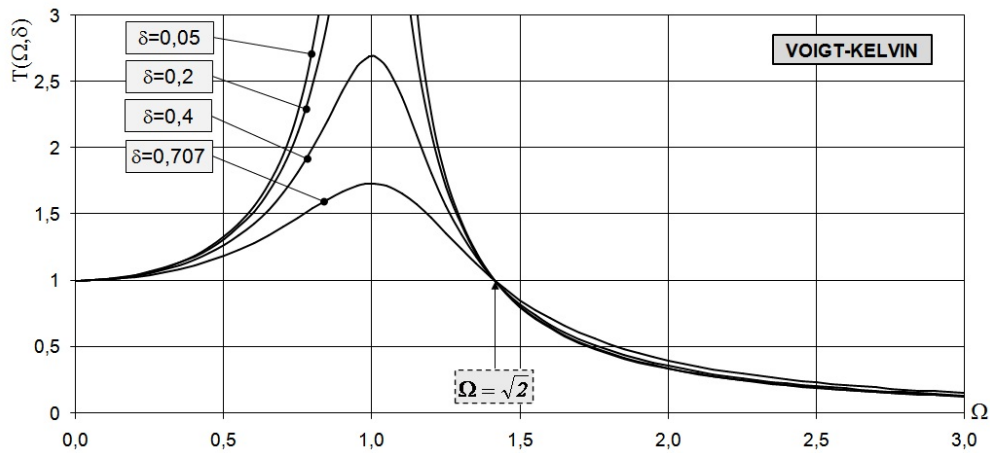


Fig. 10 Variația transmisibilității $T(\Omega, \delta)$ în cazul amortizării hysteretice δ (detaliu)

În figura 4 sunt reprezentate variațiile factorului de amplificare funcție de pulsația relativă Ω (considerată variabilă), pentru anumite valori ale fracțiunii din amortizarea critică ζ (cazul amortizării vâscoase). În figura 5 sunt prezentate variațiile factorului de amplificare pentru valori ale pulsației relative $0 \leq \Omega \leq 1,5$; indiferent de mărimea amortizării vâscoase, factorul de amplificare are aceeași valoare pentru $\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \zeta\right) = 2$.

În figura 6 sunt reprezentate variațiile transmisibilității funcție de pulsația relativă Ω (considerată variabilă) pentru aceleași valori ale fracțiunii din amortizarea critică ζ . Pentru valori mici ale amortizării vâscoase (și ale fracțiunii din amortizarea critică ζ), transmisibilitatea are valori mai mici, obținându-se astfel grade de izolare mai mari.

7. VARIAȚIA FACTORULUI DE AMPLIFICARE ȘI A TRANSMISIBILITĂȚII PENTRU MODELUL CU AMORTIZARE HISTERETICĂ δ

În figurile 7 și 8 sunt reprezentate variațiile factorului de amplificare funcție de pulsația relativă Ω (considerată variabilă) pentru anumite valori ale factorului de amortizare histeretică δ . Indiferent de mărimea amortizării histeretice (a factorului de amortizare δ), pentru valoarea pulsației relative $\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2} A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \zeta\right) = 2$. În figurile 9 și 10 sunt reprezentate variațiile transmisibilității funcție de pulsația relativă Ω (considerată variabilă) pentru aceleași valori ale factorului de amortizare histeretică δ .

8. CONCLUZII

Analizând reprezentarea grafică a factorului de amplificare și a transmisibilității pentru sistemul cu amortizare vâscoasă (fig. 5, fig. 6) se observă că:

-atunci când pulsația forței perturbatoare este redusă în comparație cu pulsația proprie a sistemului mecanic 1DOF ($\omega \ll p$), indiferent de amortizarea din sistem factorul de amplificare tinde către valoarea $A_0 \rightarrow 1$, amplitudinea vibrației devenind egală cu deformația δ_{st} corespunzătoare solicitării în regim static a sistemului; în acest caz, întreaga forță aplicată (în regim cvasistatic) se transmite direct, transmisibilitatea fiind $T \rightarrow 1$ indiferent de mărimea amortizării;

-în situația în care pulsația forței perturbatoare este cu mult mai mare decât pulsația proprie a sistemului ($\omega \gg p$), factorul de amplificare tinde către valoarea zero, mărimea amplitudinilor vibrațiilor forțate nefiind practic influențată de amortizarea din sistem; pentru valori ale pulsației relative $\Omega > \sqrt{2}$, transmisibilitatea este subunitară ($T < 1$), sistemul comportându-se ca un izolator de forță, indicele de izolare fiind cu atât mai mare cu cât amortizarea este mai mică și pulsația relativă este mai mare;

-la rezonanță ($\omega \approx p$), factorii de amplificare și amplitudinile vibrațiilor forțate cresc foarte mult, valorile acestora fiind puternic influențate de amortizarea din sistem (cu cât amortizarea este mai mare, cu atât cei doi parametri au valori mai mici); la rezonanță și transmisibilitatea are valori foarte mari, fiind puternic influențată de mărimea amortizării (cu cât amortizarea este mai mare, cu atât transmisibilitatea este mai mică);

-în intervalul $\Omega \in [0, \sqrt{2}]$ transmisibilitatea este supraunitară, sistemul comportându-se ca un amplificator de forță.

Din analiza factorului de amplificare și a transmisibilității pentru sistemul cu amortizare histeretică (fig. 7, fig. 8) se poate concluziona:

-atunci când pulsația forței perturbatoare este redusă în comparație cu pulsația proprie a sistemului mecanic 1DOF ($\omega \ll p$), factorul de amplificare tinde către valoarea 1, amplitudinea vibrației devenind egală cu deformația δ_{st} corespunzătoare solicitării în regim static a sistemului; cu cât amortizarea este mai mare, cu atât factorul de amplificare și amplitudinea vibrațiilor forțate este mai mică; în acest caz, întreaga forță aplicată (în regim cvasistatic) se transmite direct, transmisibilitatea fiind $T \rightarrow I$ indiferent de mărimea amortizării;

-în situația în care pulsația forței perturbatoare este cu mult mai mare decât pulsația proprie a sistemului ($\omega \gg p$), sistemul cu amortizare histeretică se comportă asemănător cu cel cu amortizare vâscoasă din punctul de vedere al factorului de amplificare și al transmisibilității;

-rezonanța de amplitudine se produce întotdeauna la $\Omega = 1$ ($\omega \approx p$), factorii de amplificare, amplitudinile vibrațiilor forțate și transmisibilitatea fiind influențate de mărimea amortizării la fel ca la sistemul cu amortizare vâscoasă;

-în intervalul $\Omega \in [0, \sqrt{2}]$ transmisibilitatea este supraunitară, sistemul comportându-se ca un amplificator de forță.

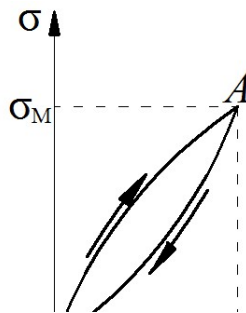


Fig. 11 Răspunsul dinamic al reazemelor elastomerice - modelul Voigt - Kelvin

Modelul V-K se utilizează pentru a modela materiale care la descărcare revin la starea de referință, dar nu parcurg același traseu ca la încărcare (fig. 11).

BIBLIOGRAFIE

- [1] **P. Bratu**, *Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje*, Ed. Tehnică, București, 1990
- [2] <http://www.adhesiveandglue.com/elastomer.html>
- [3] <https://en.wikipedia.org/wiki/Elastomer>
- [4] **Gh. Ene, C. Pavel**, *Introducere în tehnica izolării vibrațiilor și a zgomotului*, Editura Matrix Rom, București, 2012
- [5] **P. Bratu**, *Analiza structurilor elastice. Comportarea la acțiuni statice și dinamice*, Ed. Impuls, București, 2011
- [6] **P. Bratu**, *Vibrații mecanice. Teorie. Aplicații tehnice*, Ed. Impuls, București, 1998
- [7] **P. Bratu**, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, București, 2000
- [8] **P. Bratu, N. Drăgan**, *L'analyse dynamique de l'interaction machine-structure sur la base du modèle équivalent de rigide aux liaisons visco-elastiques*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [9] **P. Bratu, N. Drăgan**, *L'analyse des mouvements désaccouplés appliquée au modèle de solide rigide aux liaisons élastiques*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [10] **Gh. Buzdugan, L. Fetcu, M. Radeș**, *Vibrații mecanice*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [11] <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029614003423>