

## ANALIZA DINAMICĂ A TRANSPORTOARELOR VIBRATOARE MODELATE CA SISTEME MECANICE ELASTICE CU TREI GRADE DE LIBERTATE

### THE DYNAMIC ANALYSIS OF THE VIBRATING CONVEYORS MODELED AS 3DOF MECHANICAL ELASTIC SYSTEMS

Gianina Cornelia SPÂNU (ȘTEFAN)<sup>1,2</sup>,  
Aurora Maria POTÎRNICHE<sup>3</sup>, Gigel Florin CĂPĂȚÂNĂ<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila,  
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET, Romania

<sup>2</sup>Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Școala Doctorală de Inginerie, Romania  
e-mail: [spanugianina@yahoo.com](mailto:spanugianina@yahoo.com)

<sup>3</sup>Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila,  
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET, Romania  
e-mail: [Potarniche.Aurora@ugal.ro](mailto:Potarniche.Aurora@ugal.ro)

<sup>4</sup>Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila,  
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET, Romania  
e-mail: [gcapatana@ugal.ro](mailto:gcapatana@ugal.ro)

**Rezumat:** Modelarea dinamică a transportoarelor vibratoare și a alimentatoarelor consideră că organul de lucru al acestora este solid rigid rezemat elastic, cu un singur grad de libertate dinamică. Aceste ipoteze conduc la relații simplificate de calcul, care sunt utile în proiectarea și activitatea de exploatare, dar nu pot explica fenomene precum puterea mare necesară pentru antrenare, aglomerări ale materialului transportat în anumite zone ale jgheabului, fenomene rezonatorii la alte frecvențe decât cea proprie, etc. În această lucrare, este prezentată analiza dinamică a unui transportor vibrator inerțial cu două mase excentrice modelat ca un sistem mecanic elastic cu trei grade de libertate. După determinarea ecuațiilor diferențiate de mișcare ale organului de lucru, se determină amplitudinile vibrațiilor forțate și defazajele în punctele de reazem și, pe baza acestora, energia și puterea necesară antrenării vibratorului inerțial.

**Cuvinte cheie:** modelare dinamică, solid rigid 3DOF, reazeme elastice, transportor vibrator

**Abstract:** Usually, the dynamic models for vibratory conveyers and feeders considers them like solid bodies with 1DOF. These hypothesis leads to simplified calculation formula, which are useful in designing and in exploitation activity, but cannot explain phenomena like great power required to drive, agglomerations of transported material in certain areas of the eaves, sub and surharmonic resonances, a.s.o. In this paper, there is presented the model of a two eccentric masses inertial vibratory conveyer modeled as a solid body with 3DOF. After the determination of the differential moving equations of the organ to work written in displacements and in deformations, there are determined the forced vibrations amplitudes and the phase differences for the bearing points and, on the basis of those, the energy and power consumptions in order to drive of the vibrating conveyer.

**Keywords:** dynamic modeling, 3DOF solid body, elastic bearings, vibrating conveyer

## 1. INTRODUCERE

Eficiența energetică, fiabilitatea ridicată și simplitatea constructivă sunt elemente care recomandă utilizarea mașinilor și utilajelor tehnologice statice cu acțiune vibrantă (transportoare, alimentatoare, ciururi, dozatoare, etc.) în cadrul liniilor tehnologice automate cu condiții grele de lucru din industriile extractive, a materialelor de construcții și alte domenii economice [1] [2]. În etapele de cercetare și proiectare ale acestor utilaje, se utilizează în mod frecvent relații simple de calcul, determinate pe baza unei modelări ca un sistem vâsco-elastic cu comportament liniar, cu un singur grad de libertate, acționat de o forță excitatoare armonică [3] [4] [5] [6].

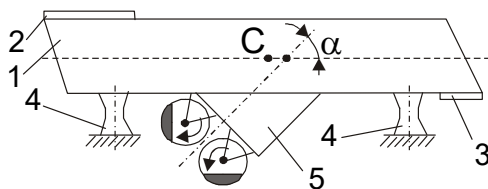


Fig. 1 Transportor vibrator inerțial - schema constructivă [7]

Pentru determinarea consumului energetic și a puterii necesare acționării se consideră transportorul liniar acționat de un vibrator inerțial cu două mase excentrice sincronizate din figura 1, unde au fost făcute notațiile [8] [9] [10]:

- 1-jgheab (organ de lucru);
- 2-gură alimentare; 3-gură evacuare;
- 4-elemente vâsco-elastice de rezemare (amortizoare din cauciuc, arcuri metalice diverse);
- 5-vibrator inerțial bimasic;
- C-centrul de masă al ansamblului mobil.

## 2. MODELAREA DINAMICĂ A TRANSPORTORULUI

Pentru studiul dinamic al transportorului, se consideră modelul cu un plan de simetrie vertical-longitudinal din figura 2. Simetria se referă atât la elementele structurale (de inerție, de disipare, de elasticitate), cât și la acționare [11] [12] [13]. Ipoteza referitoare la simetrie este confirmată de construcția celor mai multe transportoare vibratoare, urmărindu-se echilibrarea în vederea reducerii vibrațiilor laterale (de alunecare), de ruluu (legănare) și de rotație (întoarcere).

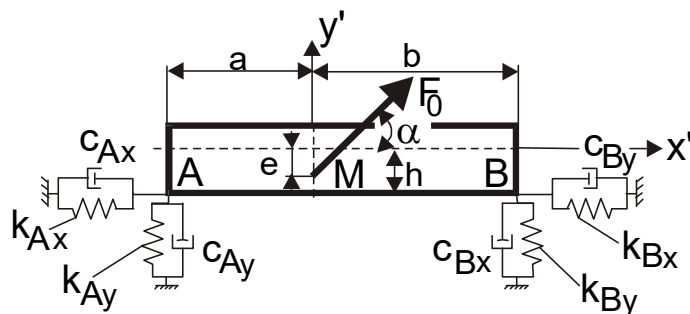


Fig. 2 Transportor vibrator inerțial - model simplificat de calcul

## 2.1. Ecuatiile de mișcare în deplasări

Studiindu-se vibrațiile transportorului în planul de simetrie  $xCy$ , sunt necesare 3 coordonate generalizate pentru caracterizarea poziției acestuia în plan. Se consideră drept coordonate generalizate  $X$  și  $Y$  deplasările pe orizontală și respectiv pe verticală ale centrului de masă, precum și  $\varphi$  rotirea în planul  $xCy$  (figura 3).

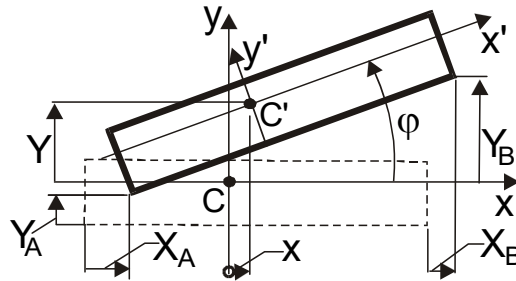


Fig. 3 Transportor vibrator inerțial - model pentru studiul în deplasări

Pentru modelarea matematică a transportorului ecuațiile Lagrange de speța a 2-a sunt:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial E}{\partial X} = Q_X^P + Q_X^F + Q_X^R \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{Y}} \right) - \frac{\partial E}{\partial Y} = Q_Y^P + Q_Y^F + Q_Y^R \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = Q_\varphi^P + Q_\varphi^F + Q_\varphi^R \end{cases} \quad (1)$$

În ipoteza micilor oscilații, energia cinetică are expresia

$$E = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m \dot{Y}^2 + \frac{1}{2} J_z \dot{\varphi}^2, \quad (2)$$

unde  $m$  este masa ansamblului mobil jgheab-vibrator

$J_z$  – momentul de inerție față de axa perpendiculară în  $C$  pe planul de simetrie.

În ipoteza unui comportament elastic liniar al elementelor de rezemare, forma pătratică a energiei potențiale are expresia:

$$\begin{aligned} 2V = & (k_{Ax} + k_{Bx})X^2 + (k_{Ay} + k_{By})Y^2 + \left[ h^2(k_{Ax} + k_{Bx}) + a^2 k_{Ay} + b^2 k_{By} \right] \varphi^2 + \\ & + h(k_{Ax} + k_{Bx})X\varphi + (-ak_{Ay} + bk_{By})Y\varphi \end{aligned} \quad (3)$$

Se subliniază faptul că variațiile energiei potențiale de natură gravitațională sunt preluate de deformațiile statice ale elementelor de rezemare din punctele  $A$  și  $B$ .

Considerând că elementele de rezemare au vâscozități liniare după direcțiile  $x$  și  $y$ , rezultă funcția de disipare de forma [14] [15] [16]:

$$2D = (c_{Ax} + c_{Bx})\dot{X}^2 + (c_{Ay} + c_{By})\dot{Y}^2 + \left[ h^2(c_{Ax} + c_{Bx}) + a^2c_{Ay} + b^2c_{By} \right] \dot{\varphi}^2 + h(c_{Ax} + c_{Bx})\dot{X}\dot{\varphi} + (-ac_{Ay} + bc_{By})\dot{Y}\dot{\varphi} \quad (4)$$

În ipoteza în care momentul static total al celor două mase excentrice este  $2m_0r$  ( $m_0$  - masele de dezechilibru,  $r$  - excentricitățile) și viteza unghiulară este  $\omega$ , forța unidirecțională are expresia:

$$F = 2m_0r\omega^2 \sin \omega t \quad (5)$$

Corespunzător fiecărei coordonate generalizate, forțele generalizate au expresiile:

$$\begin{cases} Q_1^F = Q_X^F = \frac{\delta L_X}{\delta X} = 2m_0r\omega^2 \cos \alpha \sin \omega t \\ Q_2^F = Q_Y^F = \frac{\delta L_Y}{\delta Y} = 2m_0r\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t \\ Q_3^F = Q_\varphi^F = \frac{\delta L_\varphi}{\delta \varphi} = 2em_0r\omega^2 \cos \alpha \sin \omega t \end{cases} \quad (6)$$

Cu expresiile energiilor cinetică (2) și potențială (3), a funcției de disipare (4) și ale forțelor generalizate (6) introduse în (1), ecuațiile diferențiale de mișcare în deplasări sunt de forma:

$$m\ddot{X} + (c_{Ax} + c_{Bx})\dot{X} + h(c_{Ax} + c_{Bx})\dot{\varphi} + (k_{Ax} + k_{Bx})X + h(k_{Ax} + k_{Bx})\varphi = 2m_0r\omega^2 \cos \alpha \sin \omega t \quad (7)$$

$$m\ddot{Y} + (c_{Ay} + c_{By})\dot{Y} + (-ac_{Ay} + bc_{By})\dot{\varphi} + (k_{Ay} + k_{By})Y + (-ak_{Ay} + bk_{By})\varphi = 2m_0r\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t \quad (8)$$

$$\begin{aligned} J_z\ddot{\varphi} + h(c_{Ax} + c_{Bx})\dot{X} + (-ac_{Ay} + bc_{By})\dot{Y} + \left[ h^2(c_{Ax} + c_{Bx}) + a^2c_{Ay} + b^2c_{By} \right] \dot{\varphi} + \\ + h(k_{Ax} + k_{Bx})X + (-ak_{Ay} + bk_{By})Y + \left[ h^2(k_{Ax} + k_{Bx}) + a^2k_{Ay} + b^2k_{By} \right] \varphi = \\ = 2em_0r\omega^2 \cos \alpha \sin \omega t \end{aligned} \quad (9)$$

Din motive constructive, elementele de sprijin ale transportorului sunt identice, având elasticități și disipări egale ( $k_{Ax}=k_{Bx}=k_x$ ,  $c_{Ax}=c_{Bx}=c_x$ ,  $k_{Ay}=k_{By}=k_y$ ,  $c_{Ay}=c_{By}=c_y$ ). Din motive funcționale (pentru reducerea vibrațiilor torsionale de galopare) punctele de sprijin **A** și **B** sunt astfel dispuse încât sunt coplanare orizontal cu centrul de masă **C**, putându-se scrie  $h=0$ . În aceste ipoteze, are loc o decuplare a mișcării de înaintare ( $X$ ) de celelalte două mișcări, de săltare ( $Y$ ) și galopare( $\varphi$ ), ecuațiile de mișcare (7)-(9) simplificându-se astfel:

$$\begin{cases} m\ddot{X} + 2c_x\dot{X} + 2k_xX = 2m_0r\omega^2 \cos\alpha \sin\omega t \\ m\ddot{Y} + 2c_y\dot{Y} + (b-a)c_y\dot{\varphi} + 2k_yY + (b-a)k_y\varphi = 2m_0r\omega^2 \sin\alpha \sin\omega t \\ J_z\ddot{\varphi} + (b-a)c_y\dot{Y} + (a^2 + b^2)c_y\dot{\varphi} + (b-a)k_yY + (a^2 + b^2)k_y\varphi = 2em_0r\omega^2 \cos\alpha \sin\omega t \end{cases} \quad (10)$$

## 2.2. Ecuațiile de mișcare scrise în deformații

Deoarece mișcarea de înaintare este decuplată de celelalte două mișcări, se poate aprecia că toate punctele jgheabului au aceeași mișcare după axa  $x$ . Pentru analiza disipărilor energetice în punctele de sprijin **A** și **B**, se utilizează transformările liniare de coordonate:

$$\begin{cases} Y_A = Y - a\varphi \\ Y_B = Y + b\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = \frac{bY_A + aY_B}{a+b} \\ \varphi = \frac{-Y_A + Y_B}{a+b} \end{cases} \quad (11)$$

Între vitezele generalizate și vitezele de deformație există aceleași relații liniare de legătură:

$$\begin{cases} \dot{Y} = \frac{b\dot{Y}_A + a\dot{Y}_B}{a+b} \\ \dot{\varphi} = \frac{-\dot{Y}_A + \dot{Y}_B}{a+b} \end{cases} \quad (12)$$

Înlocuind expresiile (12) ale vitezelor în (2), se obține energia cinetică scrisă cu vitezele de deformație astfel

$$2E = m\dot{X}^2 + a_{11}\dot{Y}_A^2 + 2a_{12}\dot{Y}_A\dot{Y}_B + a_{11}\dot{Y}_B^2, \quad (13)$$

unde coeficienții de inerție au expresiile după cum urmează:

$$a_{11} = \frac{mb^2 + J_z}{(a+b)^2} \quad a_{12} = a_{21} = \frac{mab - J_z}{(a+b)^2} \quad a_{22} = \frac{ma^2 + J_z}{(a+b)^2}$$

Deoarece se studiază mișcarea în deformații, formele pătratice ale energiei potențiale și ale funcției de disipare se pot scrie astfel:

$$2V = 2k_xX^2 + k_yY_A^2 + k_yY_B^2 \quad (14)$$

$$2D = 2c_x\dot{X}^2 + c_y\dot{Y}_A^2 + c_y\dot{Y}_B^2 \quad (15)$$

Utilizând transformările liniare (11) și pentru deplasările virtuale, se obțin expresiile forțelor generalizate corespunzătoare deformațiilor virtuale astfel:

$$\begin{cases} Q_1^F = Q_X^F = 2m_0r\omega^2 \cos \alpha \sin \omega t \\ Q_2^F = Q_{Y_A}^F = 2 \frac{b \sin \alpha - e \cos \alpha}{a+b} m_0r\omega^2 \sin \omega t \\ Q_3^F = Q_{Y_B}^F = 2 \frac{a \sin \alpha + e \cos \alpha}{a+b} m_0r\omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (16)$$

Ecuțiile diferențiale de mișcare scrise în deformațiile elementelor de rezemare sunt de forma:

$$\begin{cases} m\ddot{X} + 2c_x\dot{X} + 2k_xX = 2m_0r\omega^2 \cos \alpha \sin \omega t \\ a_{11}\ddot{Y}_A + a_{12}\ddot{Y}_B + c_y\dot{Y}_A + k_yY_A = 2 \frac{b \sin \alpha - e \cos \alpha}{a+b} m_0r\omega^2 \sin \omega t \\ a_{11}\ddot{Y}_A + a_{12}\ddot{Y}_B + c_y\dot{Y}_B + k_yY_B = 2 \frac{a \sin \alpha + e \cos \alpha}{a+b} m_0r\omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (17)$$

### 3. ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMULUI ÎN REGIM FORȚAT STABILIZAT

Conform ecuațiilor diferențiale (17), mișcarea pe orizontală a sistemului este decuplată de mișcările pe verticală.

Vibrația forțată pe direcția  $x$  este armonică de forma

$$X_f = A \sin(\omega t - \varphi) \quad , \quad (18)$$

amplitudinea  $A$  și defazajul  $\varphi$  determinându-se prin identificare în prima ecuație din (17).

După efectuarea calculelor se obțin expresiile  $A$  și  $\varphi$

$$A = \frac{2m_0r\omega^2}{m\sqrt{(p_x^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad (19)$$

$$\tan \varphi = \frac{2n\omega}{p_x^2 - \omega^2} \quad , \quad (20)$$

unde  $p_x = \sqrt{\frac{2k_x}{m}}$  este pulsația (proprie) a vibrației armonice orizontale

$n = \frac{c_x}{m}$  - factorul de amortizare a vibrațiilor orizontale

Pentru determinarea amplitudinilor și defazajelor vibrațiilor forțate ale punctelor **A** și **B**, se utilizează reprezentările cu numere complexe astfel:

■forma complexă a vibrațiilor forțate:

$$\tilde{Y}_A = \tilde{A}_A e^{i\omega t} \quad \tilde{Y}_B = \tilde{A}_B e^{i\omega t} \quad (21)$$

■ecuațiile diferențiale de mișcare:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{\tilde{Y}}_A + a_{12}\ddot{\tilde{Y}}_B + c_y\dot{\tilde{Y}}_A + k_y\tilde{Y}_A = H_A e^{i\omega t} \\ a_{11}\ddot{\tilde{Y}}_A + a_{12}\ddot{\tilde{Y}}_B + c_y\dot{\tilde{Y}}_B + k_y\tilde{Y}_B = H_B e^{i\omega t} \end{cases} \quad (22)$$

unde au fost făcute notațiile:

$$\begin{cases} H_A = 2 \frac{b \sin \alpha - e \cos \alpha}{a + b} m_0 r \omega^2 \\ H_B = 2 \frac{a \sin \alpha + e \cos \alpha}{a + b} m_0 r \omega^2 \end{cases} \quad (23)$$

După derivare și înlocuire în sistemul (22), rezultă sistemul algebric:

$$\begin{cases} (k_y - a_{11}\omega^2 + ic_y\omega)\tilde{A}_A - a_{12}\omega^2\tilde{A}_B = H_A \\ -a_{21}\omega^2\tilde{A}_A + (k_y - a_{22}\omega^2 + ic_y\omega)\tilde{A}_B = H_B \end{cases} \quad (24)$$

Prin rezolvarea sistemului (24) se obțin expresiile complexe ale amplitudinilor vibrațiilor forțate ale punctelor **A** și **B** astfel:

$$\begin{cases} \tilde{A}_A = \sqrt{\frac{C_A^2 + D_A^2}{C^2 + D^2}} e^{-i\varphi_A} \\ \tilde{A}_B = \sqrt{\frac{C_B^2 + D_B^2}{C^2 + D^2}} e^{-i\varphi_B} \end{cases} \quad (25)$$

unde au fost utilizate notațiile:

$$\begin{aligned} C &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\omega^4 - [k_y(a_{11} + a_{22}) + c_y^2]\omega^2 + k_y^2 \\ D &= -c_y(a_{11} + a_{22})\omega^3 + 2k_y c_y \\ C_A &= H_A(k_y - a_{22}\omega^2) + H_B a_{12}\omega^2 \\ D_A &= H_A c_y \omega \\ C_B &= H_B(k_y - a_{11}\omega^2) + H_A a_{12}\omega^2 \\ D_B &= H_B c_y \omega \end{aligned}$$

Defazațele dintre vibrațiile forțate și forța excitatoare au expresiile:

$$\begin{cases} \tan \varphi_A = \frac{C_{AD} - D_{AC}}{C_{AC} + D_{AD}} \\ \tan \varphi_B = \frac{C_{BD} - D_{BC}}{C_{BC} + D_{BD}} \end{cases} \quad (26)$$

Trecând la exprimarea în numere reale a soluțiilor, se obțin expresiile amplitudinilor astfel:

$$\begin{cases} A_A = \sqrt{\frac{C_A^2 + D_A^2}{C^2 + D^2}} \\ A_B = \sqrt{\frac{C_B^2 + D_B^2}{C^2 + D^2}} \end{cases} \quad (27)$$

#### 4. PUTEREA DE ACȚIONARE NECESARĂ ÎN REGIM FORȚAT STABILIZAT

Principalele consumuri energetice apar datorită frecărilor interne între particulele materialului transportat și între acestea și jgheabul transportorului, precum și în elementele de rezemare și în lagărele vibratorului. Dacă pierderile datorate interacțiunilor dintre particule nu pot fi cuantificate, cele ce apar la interacțiunea particulă-jgheab depind de regimul de lucru utilizat.

##### 4.1. Puterea disipată în elementele de rezemare

Considerând un comportament liniar disipativ al elementelor de rezemare pe direcția  $x$ , forța rezistentă este proporțională cu viteza de deformație, lucrul mecanic elementar putând fi scris astfel [17] [18]:

$$dL_x = c_x \dot{X} dX = c_x \dot{X}^2 dt \quad (28)$$

Deoarece viteza de deformație pe direcția  $x$  se scrie  $\dot{X} = A\omega \cos(\omega t - \varphi)$ , lucrul mecanic efectuat de forța disipativă într-un ciclu complet se obține prin integrarea relației (28) astfel:

$$L_x = \int_0^T dL_x = c_x \omega^2 A^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - \varphi) dt = \pi c_x \omega A^2 \quad (29)$$

În mod similar se determină disiparea de energie din cele două puncte de rezemare după direcția  $y$ :

$$L_{yA} = c_y \omega^2 A_A^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - \varphi_A) dt = \pi c_y \omega A_A^2 \quad (30)$$



$$L_{yB} = c_y \omega^2 A_B^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t - \varphi_B) dt = \pi c_y \omega A_B^2 \quad (31)$$

Consumul de putere pentru învingerea frecărilor interne din elementele de rezemare este:

$$P_D = \frac{L_D}{T} = \frac{\omega}{2\pi} (2L_x + L_{yA} + L_{yB}) = \frac{\omega^2}{2} [2c_x A^2 + c_y (A_A^2 + A_B^2)] \quad (32)$$

#### 4.2. Puterea disipată în lagărele vibratorului inerțial

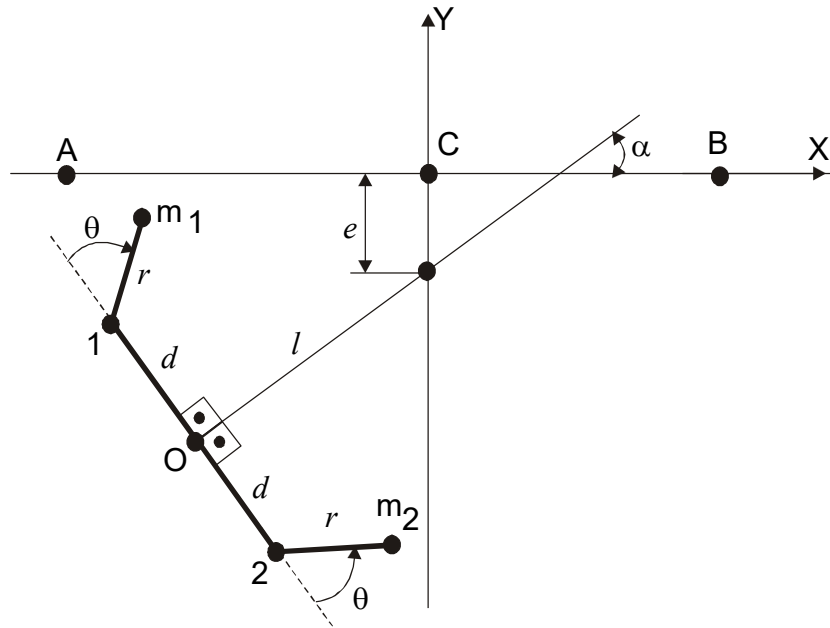


Fig. 4 Modelul vibratorului inerțial pentru calculul puterii consumate în lagărele de rotație

Forțele de frecare din lagăre depind de reacțiunile radiale și coeficientul de frecare  $\mu^*$  în acestea. Pentru calculul forțelor de apăsare se consideră schema vibratorului din figura 4 în care  $m_1 = m_2 = m_0$ . Funcție de deplasările  $Y$  și  $\varphi$ , punctul 1 se mișcă după legile:

$$\begin{cases} X_I = X + \varphi(e + l \sin \alpha - d \cos \alpha) \\ Y_I = Y + \varphi(-l \cos \alpha - d \sin \alpha) \end{cases} \quad (33)$$

Funcție de deformații, deplasările sunt:

$$\begin{cases} X_I = A \sin(\omega t - \varphi) + \frac{-Y_A + Y_B}{a + b} (e + l \sin \alpha - d \cos \alpha) \\ Y_I = \frac{b Y_A + a Y_B}{a + b} + \frac{-Y_A + Y_B}{a + b} (-l \cos \alpha - d \sin \alpha) \end{cases} \quad (34)$$

Ținând seama de expresiile (26) și (27) ale amplitudinilor și defazajelor vibrațiilor punctelor **A** și **B**, rezultă forma vibrațiilor punctului **1** după **X** și **Y** astfel

$$\begin{cases} X_I = A_{Ix} \sin(\omega t - \varphi_{Ix}) \\ Y_I = A_{Iy} \sin(\omega t - \varphi_{Iy}) \end{cases} \quad (35)$$

unde:

$$\begin{aligned} A_{Ix}^2 &= A^2 + E_I^2 + 2AE_I \cos(\varphi - \varphi_I) & E_I^2 &= E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B \cos(\varphi_A - \varphi_B) \\ E_A &= -\frac{e + l \sin \alpha - d \cos \alpha}{a + b} A_A & E_B &= \frac{e + l \sin \alpha - d \cos \alpha}{a + b} A_B \\ F_A &= \frac{b + l \cos \alpha + d \sin \alpha}{a + b} A_A & F_B &= \frac{a - l \cos \alpha - d \sin \alpha}{a + b} A_B \\ A_{Iy}^2 &= F_A^2 + F_B^2 + 2F_A F_B \cos(\varphi_A - \varphi_B) & \tan \varphi_I &= \frac{E_A \sin \varphi_A + E_B \sin \varphi_B}{E_A \cos \varphi_A + E_B \cos \varphi_B} \\ \tan \varphi_{Ix} &= \frac{A \sin \varphi + E_I \sin \varphi_I}{A \cos \varphi + E_I \cos \varphi_I} & \tan \varphi_{Iy} &= \frac{F_A \sin \varphi_A + F_B \sin \varphi_B}{F_A \cos \varphi_A + F_B \cos \varphi_B} \end{aligned}$$

În mod similar se pot determina vibrațiile punctului **2** după cele două direcții:

$$\begin{cases} X_2 = A_{2x} \sin(\omega t - \varphi_{2x}) \\ Y_2 = A_{2y} \sin(\omega t - \varphi_{2y}) \end{cases} \quad (36)$$

Deplasările, respectiv accelerațiile masei **m<sub>I</sub>** se scriu funcție de cele ale punctului **1** astfel:

$$\begin{cases} X_{mI} = X_I + r \sin(\omega t - \alpha) \\ Y_{mI} = Y_I + r \cos(\omega t - \alpha) \end{cases} \xrightarrow{\frac{d^2}{dt^2}} \begin{cases} \ddot{X}_{mI} = \ddot{X}_I - \omega^2 r \sin(\omega t - \alpha) \\ \ddot{Y}_{mI} = \ddot{Y}_I - \omega^2 r \cos(\omega t - \alpha) \end{cases} \quad (37)$$

Vectorul de poziție al masei **m<sub>I</sub>** față de lagărul **1** este de forma:

$$\bar{r}_I = \overline{Im}_I = r \sin(\omega t - \alpha) \bar{i} + r \cos(\omega t - \alpha) \bar{j} \quad (38)$$

Componenta accelerației masei **m<sub>I</sub>** de-a lungul dreptei ce trece prin lagărul **1** este:

$$\begin{aligned} a_{rI} &= \frac{\bar{a}_m I \bar{r}_I}{r_I} = -\omega^2 r - \frac{\omega^2}{2} [A_{Ix} \cos(\alpha - \varphi_{Ix}) + A_{Iy} \sin(\alpha - \varphi_{Iy})] + \\ &+ \frac{\omega^2}{2} A_{Ix} \cos(2\omega t - \alpha - \varphi_{Ix}) - \frac{\omega^2}{2} A_{Iy} \sin(2\omega t - \alpha - \varphi_{Iy}) \end{aligned} \quad (39)$$

Forța cu care masa  $m_I$  acționează asupra lagărului **1** este de forma  $F_I = -m_I a_{rI}$ , lucrul mecanic al forțelor de frecare din acest lagăr într-o perioadă  $T$  fiind

$$L_I = \int_0^{2\pi} dL_{fI} = \int_0^{2\pi} \mu^* F_I R d(\omega t) \quad , \quad (40)$$

unde  $R$  este raza fusului lagărului.

După înlocuiri și efectuarea calculelor rezultă lucrul mecanic pe ciclu

$$L_{I_f} = 2\pi\mu^* Rm_0\omega^2 \left\{ r + \frac{I}{2} [A_{Ix} \cos(\alpha - \varphi_{Ix}) + A_{Iy} \sin(\alpha - \varphi_{Iy})] \right\} \quad , \quad (41)$$

Puterea consumată pentru învingerea frecărilor din cele două lagăre ale vibratorului sunt:

$$P_{I_f} = \frac{L_{I_f}}{T} = \mu^* Rm_0\omega^3 \left\{ r + \frac{I}{2} [A_{Ix} \cos(\alpha - \varphi_{Ix}) + A_{Iy} \sin(\alpha - \varphi_{Iy})] \right\} \quad (42)$$

$$P_{2_f} = \frac{L_{2_f}}{T} = \mu^* Rm_0\omega^3 \left\{ r + \frac{I}{2} [A_{2x} \cos(\alpha + \varphi_{2x}) + A_{2y} \sin(\alpha + \varphi_{2y})] \right\} \quad (43)$$

Puterea disipată în elementele de rezemare și în lagăre se obține prin însumare astfel:

$$P = P_D + P_{I_f} + P_{2_f} \quad (44)$$

## 5. CONCLUZII

Prezentul studiu poate constitui, prin relațiile de calcul ale puterii necesare de acționare, un instrument de lucru în activitatea de proiectare și cercetare dar și în exploatarea transportoarelor vibratoare inerțiale.

## BIBLIOGRAFIE

- [1] **N. Drăgan**, *Dinamica transportoarelor vibratoare inerțiale*, Editura Impuls, București, 2003
- [2] **N. Drăgan**, *Modelarea neliniară a proceselor de transport prin vibrații*, Editura Impuls, București, 2003
- [3] **N. Drăgan**, *Aspects regarding the dynamics of the vibrating conveyors modeled as 3DOF elastic systems*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVIII, Galați, 2012
- [4] **N. Drăgan**, *The dynamic analysis of the inertial vibrating screens modeled as 3DOF elastic systems*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVIII, Galați, 2012
- [5] **P. Bratu**, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, București, 2000
- [6] **P. Bratu, N. Drăgan**, *L'analyse dynamique de l'interaction machine-structure sur la base du modèle équivalent de rigide aux liaisons visco-elastiques*, Analele Universității “Dunărea de Jos” din

Galati, Fascicula XIV, 1997

[7] **P. Bratu, N. Drăgan**, *L'analyse des mouvements désaccouplés appliquée au modèle de solide rigide aux liaisons élastiques*, Analele Universității “Dunărea de Jos” din Galați, Fascicula XIV, 1997

[8] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems Dynamics of the Rigid Body with Structural Symmetries. Modal Analysis. Transmitted Forces and Moments*, Proceedings of the 10<sup>th</sup> WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", Prague, March 23-25 2009

[9] **N. Dragan**, “*Theoretical studies regarding the dynamics of the rigid body with elastic bearings and structural symmetries, excited by harmonical forces and couples*”, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. VII (XVII), Section Mechanics, 2008

[10] **N. Dragan**, *Theoretical researches about dynamic forces transmitted to the structure through viscous-elastic bearings by the rigid body with symmetries*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. VII (XVII), Section Mechanics, 2008

[11] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems with nonlinear damping. Power and amplitude numerical analysis*, Proceedings of the 10<sup>th</sup> WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", Prague, March 23-25 2009

[12] **N. Dragan**, *Some considerations about the dynamics of the reinforced concrete bridges modeled as a rigid solid with viscous-elastic bearings*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. IX (XIX), 2010, NR3

[13] **N. Dragan**, *Analiza dinamică a solidului rigid cu simetrii structurale rezemat elastic. Studiu de caz – vibrațiile decuplate ale elementelor din beton armat (Dynamic analysis of the rigid solid with structural symmetries elastically jointed. Case study – decoupled vibrations of the reinforced concrete beams)*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 1 (2010) nr. 2, 2010, Ed. Matrix Rom, București

[14] **N. Dragan**, *Modal analysis of the solid rigid with structural symmetries and multiple elastic bearings*, International Conference on Vibration Problems ICoVP-2011, 5-8 September 2011, Prague, Czech Republic

[15] **N. Dragan**, *Rheological SLS model. Dynamic parameters of the systems with viscous damping. Part 1: Amplitude factor*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 1 Issue XXIX, Galati, 2017

[16] **N. Dragan**, *Rheological SLS model. Dynamic parameters of the systems with viscous damping. Part 2: Transmissibility factor and isolation degree*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 1 Issue XXIX, Galati, 2017

[17] **G.C. Spănu (Ștefan), N. Dragan**, *Analiza transmisibilității și a gradului de izolare a vibrațiilor la sistemele mecanice cu amortizare structurală. Modelul Zener (Analysis of the transmissibility ratio and the isolation degree of the vibration for mechanical systems with structural damping. Zener Model)*, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Volumul 8 (2017) nr. 4, 2017, Ed. Matrix Rom, București

[18] **N. Dragan**, *The dynamic analysis of the mechanical systems. Calculus of the equivalent dynamic forces and torques*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, Galati, 2008