

METODE DE MODELARE A ELEMENTELOR GRANULARE TRIDIMENSIONALE

METHODS OF MODELING THREE-DIMENSIONAL GRANULAR ELEMENTS

Lucian BLAGA¹, George MICU², Gabriel POPA³,
Marin PREDA⁴, Claudiu-Nicolae BADEA⁵, George DUMITRU⁶

¹Autoritatea Feroviară Română - Calea Griviței nr. 393, sectorul 1, București, România
e-mail autor: Lucian BLAGA, lucianblaga@afer.ro

^{1,2,4,5,6}Autoritatea Feroviară Română - Calea Griviței nr. 393, sectorul 1, București, România
e-mail autori: George MICU, Marin PREDA, marinpreda54@yahoo.com, Dragoș Marian BALINT, balint_dragos@yahoo.com, Claudiu-Nicolae BADEA, badeaclaudiun@gmail.com, George DUMITRU, george.dumitru.cfr@gmail.com

³Universitatea Politehnica București, Splaiul Independenței nr. 313, București, România
e-mail autor: Gabriel POPA: gabi21popa@yahoo.com

Rezumat: *Materialele granulare constituie o clasă de materiale compuse dintr-un număr mare de entități elementare, așa numitele boabe. Aceste granule au adesea forme neregulate, iar mărimea acestora variază între un micron și câteva zeci de metri în funcție de domeniul de aplicare. Aceste materiale se regăsesc în multe domenii, geologie, construcții civile și înțelegerea comportamentelor lor; care sunt complexe, este astăzi intens studiat. Astfel, în funcție de eforturile aplicate acestui tip de mediu, se poate observa o evoluție comparabilă cu cea a unui solid, a unui lichid sau a unui gaz în funcție de condițiile de funcționare. Un material granular supus unor sollicitări mecanice, cum ar fi tremuraturul, vibrațiile, tinde să se compacteze treptat. Această compactare implică constrângeri datorită geometriei și frecțiunii dintre aceste particule. Studiul compactării, în special dinamica acestui fenomen la scară largă, este rezultatul studiilor relativ recente. Se poate distinge două regimuri, dacă accelerația depășește un anumit prag, atunci se observă că eșantionul se deplasează liber între două mișcări verticale, fiind astfel supus șocurilor care determină stratul de densificare. Dacă accelerația nu este suficientă, energia sistemului este disipată prin frecare.*

Cuvinte cheie: *granule, compactare, frecțiune, vibrație, șoc, accelerație.*

Abstract: *Granular materials constitute a class of materials composed of a large number of elementary entities, so-called grains. These granules often have irregular shapes and their size varies between a micron and a few tens of meters depending on the scope. These materials are found in many areas, geology, civil engineering, and the understanding of their behaviors, which are complex, is today intensively studied. Thus, depending on the efforts made on this type of environment, one can see an evolution comparable to that of a solid, a liquid or a gas depending on the operating conditions. A granular material subjected to mechanical stresses, such as trembling, vibration, tends to gradually offset. This compaction involves constraints due to geometry and friction between these particles. The study of compaction, especially the dynamics of this phenomenon on a large scale, is the result of relatively recent studies. Two regimes can be distinguished, if the acceleration exceeds a certain threshold, then it is observed that the sample moves freely between two vertical movements, thus being subjected to the shocks that determine the densification layer. If the acceleration is not sufficient, the system energy is dissipated by friction.*

Keywords: *granules, compaction, friction, vibration, shock, acceleration.*

1. INTRODUCERE

Metodele elementului discret vizează modelarea comportamentului colectiv a unui mediu care constă din elemente interacționante distincte. Aceste metode sunt utilizate în mod obișnuit pentru modelarea mediilor granulare, de exemplu nisip, pietre, medii condensate etc. Una dintre particularitățile metodelor cu elemente discrete este de a lua în considerare fiecare element constituind mediul studiat ca entitate separată a cărei mișcare este gestionată prin interacțiunile cu mediul său. Principiul general al acestor metode este prezentat în figura 1.

O altă particularitate constă în faptul că sistemele pe care urmează a le aborda în lucrarea de față, iau în considerare caracterul neregulat, pentru care s-a ținut cont de trei motive. Primul dintre acestea face referire la faptul că unele corpuri pot suferi deplasări și rotații mari, fără a suferi deformații, ceea ce implică neliniaritatea de tip cinematic. Un alt motiv constă în faptul că în cazul unei coliziuni între două particule rigide, funcția, dependentă de timp, care reprezintă viteza este discontinuă, ceea ce implică o neregularitate temporală. O coliziune apare ca fiind instantanee în raport cu scala de timp a mișcării. Ultimul dar nu cel din urmă motiv luat în considerație în această lucrare este legat de legile interacțiunii dintre două corpuri care sunt de obicei definite de relații neliniare între eforturile și vitezele relative. Aceste relații pot fi, de exemplu, condiții unilaterale conform legii *Coulomb*. Prezența unor condiții unilaterale dă naștere unor discontinuități în evoluția variabilelor cinematice [1].

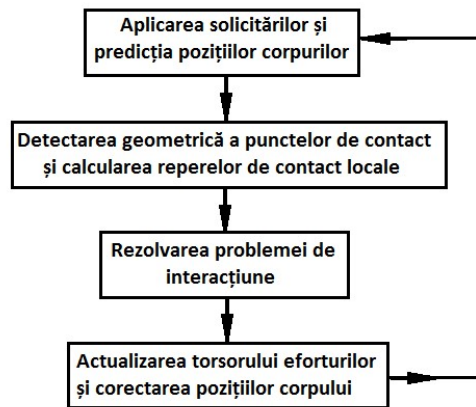


Fig. 1. Etapele unei metode prin elemente discrete.

Elementele necesare pentru o modelare prin elemente discrete sunt: discretizarea în spațiu a comportamentului corpurilor, cinematica lor, detectarea interacțiunilor, legile verificate de aceste interacțiuni și în final, diferitele strategii și metode de rezolvare a problemei complete [2].

2. ECUAȚIA MIȘCĂRII UNUI CORP ÎN PREZENȚA UNUI CONTACT

Se poate scrie ecuația dinamicii unui corp în prezența contactelor dar fără șoc în următoarea formă:

$$M\ddot{u} = F(q, u, t) + P(t) + r \quad (1)$$

unde q reprezintă orice parametru (de exemplu poziția centrului de greutate al unui corp rigid, parametrii de rotație ai acestui corp sau deplasările nodurilor elementelor de plasă finite), u

funcția de viteză și r contribuția forțelor de contact pe care nu le știm prioritare. Vectorii $F(q, u, t)$ și $P(t)$ reprezintă forțele externe sau interne precum și viteze dependente de viteză denumite în mod obișnuit centrifugal și giroscopic.

Pentru un corp rigid această ecuație înseamnă că tursorul forțelor exterioare este egal cu tursorul dinamic. Această ecuație se poate scrie sub forma ecuațiilor *Newton - Euler*:

$$m\dot{v} = P(t) + r \quad (2)$$

$$I\dot{\omega} = -\omega \cdot (I \cdot \omega) + MP(t) + Mr \quad (3)$$

unde v reprezintă viteza centrului de masă, ω vectorul de viteză unghiulară, $\dot{\omega}$ derivatul vectorului viteza în referința legată la solid, respectiv $P(t)$ și $MP(t)$ reprezintă rezultatul și momentul în centrul de greutate al tursorului forțelor externe, r și Mr rezultatul și momentul rezultat în centrul de greutate al tursorului forțelor de contact, m matricea de masă, I matricea de inerție. Relația (3) este prioritar neliniară datorită primului termen drept, termenul nul în cazul bidimensional sau când corpul are o simetrie sferică [3].

Această ecuație diferențială nu permite descrierea riguroasă, din punct de vedere matematic, ce se întâmplă în timpul unei coliziuni sau a oricărui alt fenomen neregulat. Relația (1) trebuie, prin urmare, să fie extinsă la formalismul dinamicii neregulate. Având în vedere că funcția de viteză u este o funcție de variație limitată local, este posibil să se scrie problema în ceea ce privește măsurătorile diferențiale așa cum propune Moreau [4]:

$$Mdu = [F(q, u, t) + P(t)]dt + r dv \quad (4)$$

unde du reprezintă măsura diferențială u , dt măsura lui Lebesgue și r contribuția impulsurilor locale exercitate în timpul prezenței contactelor și dv o măsură non-negativă. În cazul obișnuit, găsim forma clasică (1) cu $du = u dt$.

3. DESCRIEREA CONTACTULUI

Vom discuta pe scurt alegerile făcute pentru a modela contactul într-un mod general. Poziția contactului depinde de scala selectată, contactul poate fi un punct, o linie sau o suprafață. Aceste situații care se găsesc pentru obiecte rigide sau deformabile pot fi luate în considerare prin diferite abordări. Este convențional în simulările materialelor granulare să se considere abordarea nodului la nod, contactele liniare sau de suprafață fiind reprezentate de mai multe puncte de contact simultane. Acest lucru poate introduce o suprapunere de ecuații.

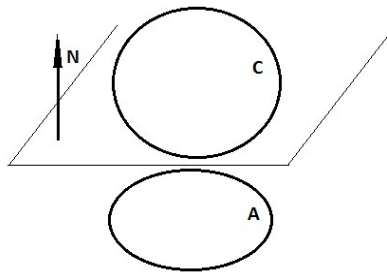


Fig. 2. Diagrama contact antagonist cu repulsie după percuție cu șoc

Prezența unui șoc de percuție între două corpuri generează o energie potențială care se transformă în energie cinetică odată cu fenomenul de repulsie, iar în virtutea principiului mecanicii al acțiunii urmată de reacțiune, cele două corpuri sunt supuse forțelor exercitate în

punctul de contact în direcții opuse. Aceste forțe implică faptul că cele două corpuri nu se întrepătrund. Apoi este posibil să se definească o alegere a modelului, definind următorul principiu: fie două corpuri în contact, unul antagonist A și unul candidat C , și se presupune că candidatul nu trebuie să pătrundă în antagonist. Antagonistul poartă marca de contact local, normala fiind orientată de la antagonist la candidat (figura 2).

Contactul dintre un corpul candidat C și corpul antagonist A va fi descris de relațiile dintre două puncte cele mai apropiate local, pe cele două contururi ale corpurilor. Se presupune că în fiecare moment suntem în măsură să definim o astfel de pereche de puncte cât mai apropiate, precum și un sistem de coordonate local (n, t, s) .

Legile comportamentului interacțiunii sunt scrise în termeni de distanță algebrică g și viteză relativă U între cele două corpuri. Vitezele relative U în sistemul de coordonate locale și vitezele u în sistemul general de coordonate pot fi legate de un operator care va fi notat cu $H^{*\alpha}$, pentru un contact α , și care este construit prin relații cinematice. O descriere mai detaliată a construcției acestui operator de trecere poate fi găsită în [5]. Dacă luăm în considerare un contact α , putem scrie:

$$U^\alpha = H^{*\alpha}(q)u \quad (5)$$

Relația dublă dintre reacțiile locale R^α și contribuția lor în cadrul de referință global r^α se poate scrie:

$$r^\alpha = H^\alpha(q)R^\alpha \quad (6)$$

r în relația (1) reprezintă suma tuturor contribuțiilor contactelor aplicate corpului. Operatori $H^{*\alpha}(q)$, $H^\alpha(q)$ sunt liniari și transpuși unul cu celălalt. Operatorul H^α este construit din considerente energetice.

4. LEGILE DE INTERACȚIUNE

Acțiunile neregulate pot fi descrise la diferite scări de timp și spațiu în funcție de nivelul de descriere necesar. Aceste acțiuni pot rezulta din fenomene foarte complexe care necesită, de exemplu, luarea în considerare a reacțiilor chimice, a fenomenelor termice, modificarea acestor acțiuni în timp. Este obișnuit în domeniul simulării numerice a materialelor granulare să se aleagă legi de prag pentru a traduce fenomenologia interacțiunii care rămân în general înțelese eronat.

Legile folosite pentru simulările noastre rămân simple: unilateralitatea și legea fricțiunii uscate.

4.1. Etapa unilateralității

Contactul unilateral semnifică faptul că două corpuri nu se pot interpenetra. O interpretare simplă este aceea de a considera că nu există nici o atracție (acțiune la distanță) și nici o forță coezivă. Expresia tuturor acestor afirmații este rezumată de condițiile lui Signorini în decalaj:

$$g \geq 0, \quad R_N \geq 0, \quad gR_N = 0 \quad (7)$$

unde g reprezintă interstiția dintre două corpuri, R_N componenta normală a reacției locale iar indexul N indică partea normală a unui vector.

Luând în considerare această lege discontinuă necesită fie o tehnică de reglementare, fie o să utilizeze o metodă de rezoluție capabilă să trateze condițiile de complementaritate.

Este posibilă rescrierea condițiilor *Signorini* (7) în funcție de viteza normală U_N , așa cum a propus *Moreau* [6], sub forma unei condiții complementare în viteză (8):

la un moment dat

$$\begin{aligned} t_0, \quad g(t_0) = 0; \quad \forall t \in [0, T], \\ \text{dacă } g(t) \leq 0 \Rightarrow U_N \geq 0, \quad R_N \geq 0, \quad U_N R_N \geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

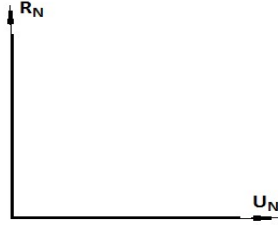


Fig. 3. Graficul condiției de complementaritate în viteză.

Condițiile de complementaritate, în decalaj sau în viteză, modelează contactul într-un mod ideal sau simplificat. Într-adevăr, la scara de contact, suprafața obiectelor care interacționează nu este netedă ca un plan sau pe suprafața unei sfere. Prezența asperităților care se pot deforma sub acțiunea contactului poate justifica un alt model de comportament. De exemplu, se poate propune ca reacția să fie proporțională cu diferența g , care poate fi luată valorile negative reflectând interpenetrarea. Condiția unilateralității este astfel regularizată de un model cu flexibilitate liniară care poate fi scris în forma:

$$\begin{aligned} \text{Dacă: } \quad g \leq 0, \quad R_N = -k_N g \\ g > 0, \quad R_N = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

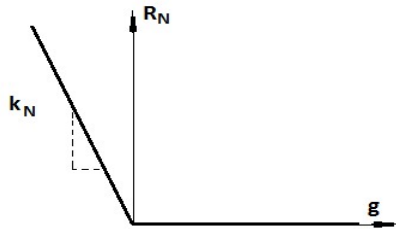


Fig. 4. Graficul unei legi regularizate.

Modelul prezentat în condițiile din (4.1) este relativ simplu; este posibil să se îmbogățească ca în metodele de tip “Molecular Dynamics”. De exemplu, putem propune următorul model:

$$\begin{aligned} \text{Dacă: } \quad g \leq 0, \quad \Rightarrow R_N = \max(0, \quad -k_N g - v_N U_N) \\ g > 0, \quad R_N = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Termenii k_N și v_N reflectă rigiditatea și viscozitatea.

Este important să subliniem abordarea regularizată și să luăm în considerare legea complementarității în viteză necesită o schemă de integrare adecvată.

4.2. Etapele fricțiunii

Legea *Coulomb* a fricțiunii uscate poate fi scrisă în modul următor, în cazul unui contact: Reacția tangențială se opune alunecării și trebuie să verifice:

$$\|R_T\| \leq \mu R_N \text{ dacă: } \|U_T\| > 0, R_T = -\mu R_N \frac{U_T}{\|U_T\|} \text{ altfel: } \|R_T\| \leq \mu R_N$$

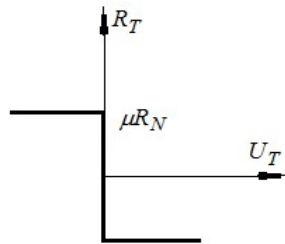


Fig. 5. Graficul bidimensional al reprezentării legii *Coulomb*.

Se poate găsi o soluție regularizată în același mod ca cel propus anterior pentru partea normală. Acest lucru este frecvent utilizat în metodele de tip “Molecular Dinamic” [7].

4.3. Parcursul fenomenelor mecanice sub influența legii șocurilor

În timpul unui șoc dinamic cu percuție, adică al unui contact care are loc într-o perioadă foarte scurtă de timp, legile anterioare descriu doar ce se întâmplă în timpul stabilirii contactului, fără a oferi informații despre trecerea contactului indus de șocul dintre cele două solide. Prin urmare, trebuie să fie o lege de șoc adoptată. O astfel de lege trebuie să descrie un fenomen complex care apare într-un interval de timp foarte scurt, de exemplu o deformare elastică, pe care nu o vom lua în considerare în scară [8]. Este obișnuit să folosim legea de restituire a lui *Newton*, $U_N^+ = -eU_N^-$, unde U_N^+ reprezintă viteza relativă normală după coliziune și U_N^- viteza relativă normală înainte de coliziune și e coeficientul de restituire a cărui validitate este discutabilă [9].

În ceea ce privește partea normală, poate fi important să se introducă un coeficient tangențial de restituire pentru a modela efectele tangențiale asupra șocului. Acești parametri care fac posibilă traducerea unei legi de șoc nu constituie o teorie generală a șocurilor [10]. Cu toate acestea, unele experimente au arătat relevanța acestei legi pentru solidele cu o anumită geometrie [11].

5. SCHEMELE DE INTEGRARE

Obiectivul schemelor de integrare în timp este de a obține o discretizare a ecuațiilor diferențiale (1) sau (4). În cazul obișnuit, este posibil să se utilizeze orice schemă de integrare pentru ecuațiile diferențiale, aceste scheme având diferite proprietăți în ceea ce privește precizia, conservarea energiei și stabilitatea convergenței.

În cazul neobișnuit, problema este diferită deoarece soluțiile își pierd proprietățile necesare pentru construirea schemelor: diferențiabilitate, continuitate. O soluție a problemei constă în abordarea așa-numitelor metode bazate pe evenimente, bazate pe o diviziune adaptivă a intervalului de timp considerat astfel încât să capteze momentul unei coliziuni.

Scopul este de a separa partea obișnuită a mișcării (mișcarea fără contact sau contactul persistent) de la partea neregulată a mișcării (șoc sau schimbare a stării de fricțiune). Această abordare face posibilă utilizarea celor mai multe scheme de integrare a ordinelor înalte [12] pentru fiecare interval în care mișcarea este regulată. Dificultatea apare în determinarea trecerii de la un interval la altul [13]. În plus, în timpul unei acumulări de coliziuni, această abordare devine dificil de utilizat deoarece timpul unui interval regulat între două evenimente neregulate devine prea mic. Această abordare este folosită în mod obișnuit în domeniul roboticii în care perioadele de zbor liber sunt importante și necesită calcule precise cu o discretizare dificilă a timpului.

Problema poate fi soluționată și prin utilizarea metodei “pas cu pas”, bazate pe o împărțire arbitrară a timpului care nu este neapărat uniformă. În acest caz ordinea schemei de integrare este în mod necesar mică, una sau două. Într-adevăr, prezența unui șoc generează o discontinuitate a funcției de viteză. Aceasta este, în ecuația (4) când funcția de viteză are o variație limitată, accelerația nu poate fi definită. Regulile legale de interacțiune modifică de asemenea proprietățile schemei de integrare. Acest tip de decupare face posibilă procesarea unui număr mare de discontinuități în timpul unui pas de timp. De asemenea, moi pot fi identificate și două familii de scheme de integrare explicite așa cum sunt de pildă metodele derivate din „Molecular Dynamics” [14], și implicit, metodele derivate din mai cunoscutul altgoritm “Dynamics Contact” [4, 15] sau „GEM”.

Având în vedere proprietățile de integrare ale măsurătorilor diferențiale [8], [9], este posibilă generalizarea scrierii ecuațiilor dinamice și obținerea unei integrări a acestei ecuații:

$$\forall \tau, t \in [0, T] :$$

$$\begin{cases} M[u(t) - u(\tau)] = \int_{\tau}^t [F(q, u, s) + P(s)] ds + \int_{[\tau, t]} r dv \\ q(t) = q(\tau) + \int_{\tau}^t u ds \end{cases} \quad (11)$$

Această expresie este obținută indiferent de numărul de coliziuni potențiale în timpul unui pas de timp $[0, T]$.

Pentru aproximarea numerică, intervalul de timp $[0, T]$ va fi arbitrar împărțit în sub-intervale. Considerând un interval de timp $[t_i, t_f]$ cu lungimea h , obținem:

$$\begin{cases} M(u_f - u_i) = \int_{t_i}^{t_f} [F(q, u, s) + P(s)] ds + hr_f \\ q(t) = q(\tau) + \int_{\tau}^t u ds \end{cases} \quad (12)$$

cu $r_f = \frac{1}{h} \int_{[t_i, t_f]} R dv$ valoarea medie a impulsului pe etapa de timp. Se va căuta, prin urmare, perechea (U_f, R_f) satisfăcând ecuațiile dinamicii și legile interacțiunii.

Când un corp este discretizat în elemente finite, este necesară o etapă suplimentară, ceea ce înseamnă introducerea unui termen de rigiditate pentru primul membru [16].

6. PAȘII STRATEGIEI DE REZOLUȚIE

Paragrafele anterioare ne-au permis să menționăm toate detaliile referitoare la o problemă de contact: o discretizare spațială și temporală, un model pentru tratarea interacțiunilor. Având în vedere toate posibilitățile de a trata aceste puncte diferite, există multe strategii de calcul pentru probleme dinamice neregulate [16].

Vom descrie elementele necesare pentru a defini problema cu contactul. Problema care trebuie rezolvată poate fi schematizată ca în figura 6.

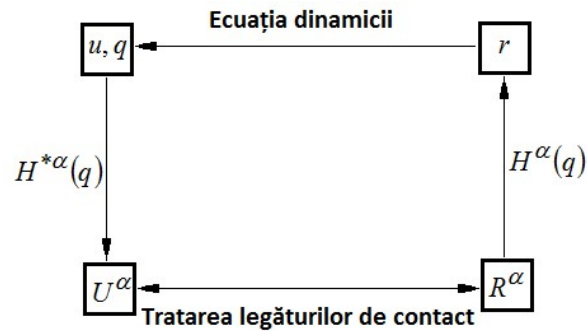


Fig. 6. Relațiile dintre variabilele locale și globale.

La nivel global, se ia în considerare ecuațiile dinamicii verificate de fiecare organism, iar la nivel local se ține seama de legile de interacțiune dintre perechile de noduri ale corpurilor în contact. Trecerea dintre aceste două nivele se face folosind matricele H și H^* care depind de poziția punctelor de contact, discretizările spațiale și temporale. Există mai multe tipuri de abordări pentru rezolvare, cum ar fi:

- o rezoluție simultană la nivel global și local, ca cea folosită de Alart și Curnier [18];
- o rezoluție la nivel global este principiul strategiilor de eliminare sau de substituție care pot fi găsite în metodele de penalizare sau multiplicatori Lagrange în metodele cu elemente finite;
- o rezoluție la nivel local este principiul strategiei de condensare.

Abordarea globală constă în rezolvarea sistemului liniar constând în toate ecuațiile dinamicii, ținând seama de legile interacțiunii. Folosind o discretizare în spațiu și timp, putem asambla următorul sistem:

$$M(u_f - u_i) = hr_{free} + hr \quad (13)$$

unde M este o matrice de bloc diagonală, fiecare bloc având mărimea sistemului de ecuații care reglează mișcarea unui corp. Vectorul $hr_{free} = \int_{t_i}^{t_f} [F(q, u, t) + P(t)] dt$ reprezintă contribuția eforturilor fără contact, unde h este pasul temporal.

Toate relațiile de contact trebuie să fie adăugate la sistem. O modalitate de a obține un sistem care nu depinde de variabilele locale este descrisă în [19]. Principiul general este următorul, ținând cont de relațiile cinematice (matricea H), variabilele locale ($g; U; R$) sunt eliminate din legile locale de interacțiune pentru a păstra numai variabilele globale ($q; u$). Astfel, prin eliminarea r din expresiile precedente, obținem un sistem de inegalități care depinde doar de variabilele globale. Aceste inegalități pot fi rezolvate folosind metode limitate de rezolvare a sistemelor constrânse. Din punct de vedere numeric, această strategie permite utilizarea unor metode de rezoluție directe sau iterative.

Abordarea locală este aceea de a condensa ecuațiile dinamicii la nivel local. Rezoluția se face la două nivele, verificăm mai întâi legile de contact la nivel local, iar atunci când relațiile sunt verificate actualizăm ecuațiile dinamice la nivel global [20]. Este posibil să se condenseze sistemul total (13) ca:

$$U = U_{free} + WhR \quad (14)$$

sau $W = H^* M^{-1} H$ este operatorul *Delassus* și $U_{free} = H^* (M^{-1} h r_{free} + u_i)$ reprezintă viteza relativă locală în absența unui contact.

Trebuie să facem distincția între metodele de rezoluție directe și iterative. Pentru a folosi metode de minimizare cu constrângeri, este necesar a reformula problema anterioară folosind legile de contact care dau un sistem de inegalități care depinde numai de reacțiile locale R . Este posibil să se rezolve simultan relațiile normale (de contact) și tangente (fricțiune) sau să se rezolve succesiv problema până la convergență.

7. CONCLUZII

Folosirea unor metode discrete de elemente pentru a studia o multitudine de corpuri în interacțiune, cum ar fi granule de balast, obligă la alegerea între toate elementele prezentate.

Studiul comportamentului unui eșantion reprezentativ de agregate supuse diferitelor solicitări, în special studiul unei porțiuni de cale balastată, necesită luarea în considerare a mai multor mii de granule. Sistemul studiat este cel mai adesea compact, numărul punctelor de contact poate fi important. S-a adoptat, prin urmare, abordarea pas cu pas. Legea de interacțiune luată în considerare au fost unilateralitatea, pentru a explica interpenetrabilitatea și fricțiunea *Coulomb*.

Este posibilă tratarea condiției de unilateralitate și a fricțiunii uscate prin regularizarea aproximărilor, ca în metoda "Molecular Dynamic". Important este evidențierea a două puncte printr-o schemă explicită este stabilă condiționat, depinde cel mai adesea de metodele care utilizează regularizarea contactului, raportul dintre rigiditatea de contact introdusă și masa granulelor. În general, se consideră pași mici în timp, comparativ cu o metodă implicită, pentru a asigura stabilitatea schemei. Este de asemenea posibil să se asigure această stabilitate prin introducerea unei vâscozități artificiale. Totodată, simulările avute în vedere, de exemplu încărcările ciclice, necesită un timp de simulare lung. Folosirea unui ciclu mic de timp poate necesita o recalculare în trepte, știind că granulele rigide se pot interpenetra doar foarte ușor pentru a evalua evoluțiile foarte precise. Abordarea de tip "Contact Dynamics" permite utilizarea unor pași mai mari în timp și luarea în considerare a unilateralității fără aproximare. În contrapartidă, numărul operațiilor care trebuie efectuate este mult mai mare și s-a ales această abordare. Legile de interacțiune au fost scrise folosind modelul candidat antagonist.

Numărul mare de contacte determină, pentru o metodă globală de rezoluție, asamblarea unei matrici de dimensiuni mari. Din punct de vedere numeric, asamblarea acestei matrici necesită o memorie mare, deci s-a preferat adoptarea unei strategii de rezoluție locală.

BIBLIOGRAFIE

- [1] **I. Sebeșan**, „*Dinamica Vehiculelor Feroviare*”, Editura MatrixRom, București 2011.
- [2] **I. Sebeșan, C.N. Badea, L.V. Păduraru, A. Badea, G.Popa**, „*Uzura Ondulatorie a Șinelor de Cale Ferată*”, Sinteze de mecanică teoretică și aplicată, Vol. 1, nr. 1, Editura MatrixRom, București 2016.
- [3] **A. Neacsa, D.B. Stoica, N.N. Antonescu**, „*Behaviour of Sintered Carbide Pins Under Simulated Work Conditions*”, Experimental Study. In Journal of the Balkan Tribological Association Volume: 18 Issue: 4 Pages: 559-565 Published: 2012.
- [4] **A. Curnier**, „*Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collection*”, Presses Polytechniques et Universitaires Romanes, Lausanne, 1992.
- [5] **P. Wriggers**, „*Computational Contact Mechanics*”, Wiley, 2002.
- [6] **J.J. Moreau**, „*Bounded variation in time*”. Éditeurs : Topics in Nonsmooth Mechanics, pages 1–74. Birkhauser, 1988..
- [7] **B. Cambou, M. Jean**, „*Micromécanique des matériaux granulaires*”, Hermes Sciences, 2001.
- [8] **W. J. Stronge**, „*Impact Mechanics*”, Cambridge University Press, 2000. W. J. STRONGE
- [9] **D. Stoianovici, Y. Hurmuzlu**, „*A critical study of the applicability of rigid body collisions theory*”, A.S.M.E. J. Appl. Mech., 63:307–316, 1996.
- [10] **J.J. Moreau**, „*Modélisation et simulation de matériaux granulaires*”, Actes du 35 ième congrès d’analyse numérique, 2003.
- [11] **C. Cholet**, „*Chocs de solides rigides*”, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1998.
- [12] **M. Abadie**, „*Simulation dynamique de mécanismes. Prise en compte du contact frottant*”, Thèse de doctorat, Université Montpellier II, 1998.
- [13] **C. Le Saux, F. Cevaer, René Motro**, „*Dynamique multi-contact d’un système de solides tridimensionnels rigides.*”, Rendus Académies des Sciences, Paris, 331:277–282, 2003.
- [14] **M.P. Allen, D.J. Tildesley**, „*Computer simulation of liquids*”, Science Publications, 1987.
- [15] **J.J. Moreau**, „*Une formulation du contact à frottement sec; application au calcul numérique.*”, Comptes Rendus Académies des Sciences, Paris, Série II, 302:799–801, 1986.
- [16] **M. Jean**, „*The non smooth contact dynamics method.* Proc Instn Mech Engrs”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177(Special issue):235–257, 1999.
- [17] **B. Brogliato**, „*Nonsmooth Mechanics*”, Springer, second edition, 1999.
- [18] **P. Alart, A. Curnier**, „*A generalized newton method for contact problems with friction*”, Journal de mécanique théorique et appliquée, (1 à 7):67–82, 1988.
- [19] **M. Jean**, „*Simulation numérique des problèmes de contact avec frottement*”, Matériaux et techniques, 1-3, 1993.
- [20] **A. Neacsa, N.N. Antonescu, D.B. Stoica**, „*Software Applications for Complex Technological Systems Reliability*”, Journal of the Balkan Tribological, Volume: 15, Issue: 1, (2009).