

DINAMICA INTERACȚIUNII ROATĂ - ȘINĂ SUPUSĂ ANALIZEI CU ELEMENT FINIT PRIN METODA NELINIARĂ

DYNAMIC INTERACTION WHEEL - RAIL ANALYZED NONLINEAR FINITE ELEMENT METHOD

Lucian BLAGA¹, Crina BADEA², Alin NICHE³,
Marius BOLĂNU⁴, Melania DUMITRU⁵, George DUMITRU⁶

¹Autoritatea Feroviară Română - Calea Griviței nr. 393, sectorul 1, București, România
e-mail autor: Lucian BLAGA, lucianblaga@ofer.ro

^{2,3,5}Universitatea Politehnica București, Splaiul Independenței nr. 313, București, România
e-mail autor: Crina BADEA: casagalbenas@yahoo.com, Alin NICHE: niche_alin@yahoo.com, Melania DUMITRU: melania76dumitru@gmail.com

^{4,6}Autoritatea Feroviară Română - Calea Griviței nr. 393, sectorul 1, București, România
e-mail autori: Marius BOLĂNU: mariusbolanu@yahoo.com, George DUMITRU: george.dumitru.cfr@gmail.com

Rezumat: Metodele elementului discret reprezintă o alternativă la o abordare a elementelor finite de modelare a comportamentului materialelor granulare. Această lucrare este dedicată studiului unei materii granulate supuse încărcărilor ciclice: balastul de cale ferată. Modelele utilizate se bazează pe metoda Molecular Dynamics, dezvoltată după Cundall. Am ales abordarea Neliniară a Dinamicii Contactului pentru metoda de rezoluție și prezentăm toate aspectele tehnice pentru cazurile bidimensionale și tridimensionale. Această abordare a fost mică sau nu a fost utilizată în domeniul feroviar. Utilizarea acestui tip de metodă este o problemă industrială, într-adevăr poate îmbunătăți înțelegerea comportamentului balastului și definește regulile de întreținere.

Cuvinte cheie: bidimensional, contact, convergență, dinamica contactului, impuls.

Abstract: Discrete element methods are an alternative to a finite element modeling approach for granular material behavior. This paper is dedicated to the study of granular material subjected to cyclic loading: the railway ballast. The models used are based on the Molecular Dynamics method, developed after Cundall. We chose the Non Linear approach to Contact Dynamics for the resolution method and we present all the technical aspects for two-dimensional and three-dimensional cases. This approach was small or not used in the rail sector. Using this type of method is an industrial problem, it really can improve understanding of the behavior of the ballast and defines the maintenance rules.

Keywords: bidimensional, contact, convergence, contact dynamics, momentum.

1. INTRODUCERE

Într-o formulare matematică riguroasă, Moreau a construit metoda dinamicii contactului, "Metoda Neliniară a Dinamicii Contactului" [1, 2, 3, 4]. Această metodă se bazează pe o ecuație adaptată a dinamicii în prezența unor eventuale coliziuni. Se caracterizează printr-o discretizare temporizată în timp, utilizând o schemă de integrare implicită și luând în considerare o detectare explicită. O rezolvare locală calculează simultan vitezele și reacțiile, luând în considerare legile de interacțiune [5]. În continuare se va prezenta toate elementele care constituie această metodă.

2. SCHEMA DE INTEGRARE PENTRU ECUAȚIILE DINAMICII NEREGULATE

Pentru a aproxima numeric, intervalul de timp $[0, T]$ va fi arbitrar împărțit în subintervale. Considerând un interval de timp $[t_i, t_f]$ cu lungimea h , obținem:

$$\begin{cases} M(u_f - u_i) = \int_{t_i}^{t_f} [F(q, u, s) + P(s)] ds + hr_f \\ q(t) = q(\tau) + \int_{\tau}^t u ds \end{cases} \quad (1)$$

unde $r_f = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_f} R dv$ este valoarea medie a impulsului raportată la unitatea de timp.

Utilizând forma neregulată integrată a ecuațiilor dinamice (1), a rezultat o schemă numerică de tip "metoda θ " pentru aproximarea celor două integrale în timp:

$$\int_{t_i}^{t_f} [F(q, u, s) + P(s)] ds \text{ și } \int_{t_i}^{t_f} u ds .$$

Putem scrie:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} [F(q, u, t) + P(t)] dt &= h(1 - \theta)[F(q_i, u_i, t_i) + P(t_i)] + \theta[F(q_f, u_f, t_f) + P(t_f)] \approx \\ &\approx h[F(q_m, u_m) + P(t_m)] \end{aligned} \quad (2)$$

$$q_f = q_i + h[(1 - \theta)u_i + \theta u_f] = q_m + h\theta u_f \quad (3)$$

unde: $t_m = t_i + (1 - \theta)h$ și $q_m = q_i + h(1 - \theta)u_i$ iar $du = u dt$.

În cazul în care $\theta \in [0, 5, 1]$, atunci înseamnă că schema de integrare este implicită și stabilă necondiționat.

3. DISCRETIZAREA RELAȚIILOR CINEMATICE

Metoda "NDC consideră ca fiind necunoscute variabilele cinematice de la sfârșitul treptei, precum și impulsurile medii [6]. Totuși, așa cum am văzut, ecuațiile dinamicii sunt exprimate sub formă de variabile globale (u ; r) și legile de interacțiune sub formă de variabile locale (U ; R). Relațiile dintre variabilele locale și globale sunt scrise sub următoarea formă (4) respectiv:

$$\begin{aligned} -U &= H^*(q)u \\ -r &= H(q)R \end{aligned} \quad (4)$$

unde: q este configurația utilizată pentru a determina reperele locale. Metoda este implicită pentru funcția de viteză u și explicită pentru funcția q . Într-adevăr, soluția depinde implicit de referință, ar fi necesar ca fiecare rezoluție locală să recalculeze aceste cantități care ar fi mult prea grele. Este o complicație tehnică, și vom face aproximarea, având în vedere pașii de timp simplificați considerați, faptul că reperul de contact local nu se schimbă precum operatorii de trecere dintre sistemul de referință global și sistemul de coordonate local [2].

Configurația de evaluare a legilor de interacțiune nu va fi aleasă la întâmplare, vom considera $q_m = q_i + (1 - \theta)hu_i$. Având în vedere aproximarea efectuată vom folosi

următoarele relații pentru calcul:

$$\begin{cases} -U_f = H^*(q_m)u_f \\ -r_f = H(q_m)R_f \end{cases} \quad (5)$$

Se poate observa că diferența de la sfârșitul etapei N este intervalul de la începutul etapei $N+1$. După ce am determinat diferența în configurația intermediară, încercăm să verificăm legile în termeni de $(g_f = g_m + hU_f, U_f, R_f)$. De fapt, totul se întâmplă ca și când am fi rezolvat dinamica globală între momente t_i , $t_f = t_i + h$ și contactul dintre momente $t_m = t_i + (1-\theta)h$ și $t_{m+1} = t_f + (1-\theta)h = t_m + h$. În cazul în care $\theta = 0,5$ va rezulta metoda în salturi în cazul în care rezoluțiile globale și locale sunt schimbate.

4. REZOLVARE PRIN METODA NELINIARĂ GAUSS-SEIDEL

Considerând că M este regulat, că organismele sunt rigide, și folosind operatorii de referință locală, referință globală (figura 1),

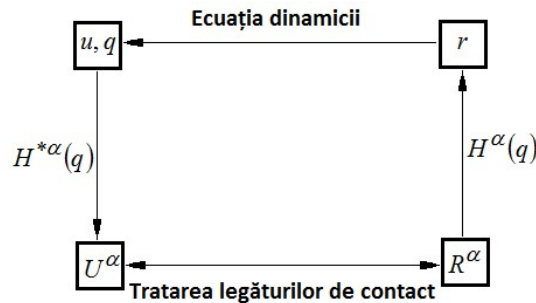


Fig. 1. Relațiile dintre variabilele locale și globale.

sistemul poate fi scris sub forma (6) respectiv: $U = U_{free} + WhR$, unde: $U = U^*u_f$ reprezintă vitezele relative dintre nodurile în contact. Expresia $U_{free} = H^*(u_i + M^{-1}r_{free})$ reprezintă vectorul vitezelor relative fără a lua în considerare forțele de contact și $W = H^*M^{-1}H$ se numește operatorul *Delassus*. Pe cale de consecință, ecuația de contact verificată α poate fi scrisă astfel:

$$U^\alpha = U_{free}^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n_c} W^{\alpha\beta} hR^\beta \quad (7)$$

unde: n_c este numărul total de contacte. Separarea contribuției acestui contact α de celelalte:

$$U^\alpha = U_{free}^\alpha + W^{\alpha\alpha} hR^\alpha + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_c} W^{\alpha\beta} hR^\beta \quad (8)$$

Se poate observa că dacă se stabilesc contribuțiile contactelor $\beta \neq \alpha$ în această ecuație, se poate obține o relație liniară între U^α și R^α . În acest caz este posibilă să găsim o pereche de forma (U^α, R^α) care să poată satisface ecuația liniară și o lege de contact de tipul:

$$legea(g^\alpha, U_T^\alpha, U_N^\alpha, R_N^\alpha, R_T^\alpha) = real \quad (9)$$

În cazul bidimensional, este posibilă obținerea explicită a unei soluții grație unei intersecții a graficelor [8]. În cazul tridimensional este necesar să se folosească o metodă iterativă, ca metoda generalizată *Newton* [9].

Acest algoritm este, prin urmare, relativ simplu, perechile de ecuații sunt rezolvate (dinamică și interacțiune) pentru fiecare contact, luând în considerare celelalte contribuții fixe. Se consideră că metoda de convergență la o soluție atunci când soluția fiecărui contact nu se modifică mai mult decât un anumit prag. Această metodă poate fi comparată cu o metodă de tip nelinier de tip *Gauss - Seidel*. Mai multe detalii despre rezolare pot fi găsite în [1, 8]. Evaluarea termenului $\sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_c} W^{\alpha\beta} R^{\beta}$ se poate face printr-una din cele două metode [10], [11] respectiv “NDC” sau “Schimb Local Global”. În cazul utilizării metodei “NDC” cu stocarea datelor locale, unde calculele se fac o dată pentru toți termenii, pot fi găsite totodată și alternative la metoda *Gauss - Seidel* utilizată în mod obișnuit pentru metoda de rezoluție “NDC”. De exemplu, se poate utiliza o metodă conjugată proiectată, care este un algoritm de optimizare cvasiconstrânsă. Utilizând această a doua metodă, atunci, pentru fiecare reacție de contact calculată, contribuția acesteia va actualiza în ecuația dinamicii $M\dot{u} = F(q, u, t) + P(t) + r$ și a particularităților acesteia în cauză. Este importantă sublinierea unei concluzii preliminare conform căreia, această metodă necesită o cantitate mică de memorie deoarece termenii $W^{\alpha\beta}$ nu sunt stocați în memorie unității de procesare a unui terminal. Cu toate acestea însă, este o metodă mai scumpă în ceea ce privește accesul la memorie și numărul de operațiuni sau. Este important de subliniat și faptul că paralelizarea metodei *Gauss - Seidel* prezentată este posibilă și dă rezultate excelente [11, 13].

5. STANDARDE DE CONVERGENȚĂ

Pentru a determina dacă metoda de convergență spre o soluție, este necesar să se evalueze, pentru fiecare contact, precizia cu care se verifică legea de contact. Există diferite metode pentru a analiza această precizie, vom prezenta unele dintre ele. Prima metodă permite estimarea preciziei contact prin contact. În general, în timpul unei iterații *Gauss - Seidel* dacă luăm în considerare contactele n_c și contactele α , atunci contactele β , cu $\beta < \alpha$ au valori actualizate și cu $\beta > \alpha$ au valori de la iterația anterioară. Rescrierea ecuației 8 notând R_e^α conduce la determinarea valorii lui R^α și a iterației recurente și se obțin astfel:

$$U^\alpha = U_{free}^\alpha + W^{\alpha\alpha} hR^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n_c} W^{\alpha\beta} - W^{\alpha\alpha} hR_e^\alpha \quad (10)$$

care mai poate fi scrisă și așa:

$$hW^{\alpha\alpha} (R^\alpha - R_e^\alpha) = U^\alpha - U_{free}^\alpha - \sum_{\beta=1}^{n_c} W^{\alpha\beta} hR^\beta \quad (11)$$

În timpul unei iterații, cantitățile $\sum_{\beta=1}^{n_c} W^{\alpha\beta} hR^\beta$ și U_{free}^α sunt cunoscute și cuplul

U^α , R^α este determinat de legile interacțiunii. Prin urmare, este posibil să se estimeze exactitatea cu care este verificată legătura de contact. Pentru a simplifica această estimare,

pentru fiecare contact cantitatea $hW_N^{\alpha\alpha} \left(R_N^\alpha - R_{N_e}^\alpha \right)$, unde $W_N^{\alpha\alpha}$ reprezintă partea normală a operatorului *Delassus* și R_N^α reacția normală. Dacă această cantitate este mai mică decât un prag stabilit, se consideră că legea de contact este corect verificată pentru contactul examinat. În caz contrar, procesul iterativ al lui *Gauss - Seidel* este continuat dar considerând că nici un contact nu este verificat. Contactele sunt analizate până când verifică legătura de contact cu precizia dorită.

A doua metodă estimează acuratețea la nivel global pentru toate contactele. Există estimări pentru măsurarea erorilor de comportament, inclusiv a energiei de referință din cauza reacțiilor, a încălcării grave sau a încălcării pătrate. Considerând notațiile lui *Moreau* [8],

putem defini: energia de referință, $w_r = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \left(W^{\alpha\alpha} \cdot hR^\alpha \cdot hR^\alpha + W^{\alpha\alpha} hR_e^\alpha \cdot hR_e^\alpha \right)$ și

$$\text{încălcarea medie, } v_l = \frac{\sum_{\alpha} \frac{1}{2} \left(W^{\alpha\alpha} \cdot hR^\alpha \cdot hR^\alpha + W^{\alpha\alpha} hR_e^\alpha \cdot hR_e^\alpha \right)}{w_r}.$$

Încălcarea medie permite estimarea penetrării în direcția reacției. Aceste estimări sunt mai greu de calculat, deci este important să evaluăm periodic aceste cantități în timpul iterațiilor. Aceste două metode de evaluare a corectitudinii calculului sunt implementate într-un mod diferit. Pentru prima metodă, considerăm ca și când examinarea contactelor, care sunt verificate. Dacă se notează cu N_{verif} numărul corect de contacte verificate, se poate rezuma această metodă printr-un algoritm. În cazul contactelor n_c pentru un contact α determinat de (U^α, R^α) , legea se verifică astfel: dacă $\left| hW_N^{\alpha\alpha} \left(R_N^\alpha - R_{N_e}^\alpha \right) \right| < \text{pragul}$, atunci $\Rightarrow N_{verif} = N_{verif} + 1$. În caz contrar $N_{verif} = 0$. Dacă $N_{verif} > 2 \cdot n_c$ atunci se iese din program. Această metodă este strictă, dacă un contact nu este verificat, atunci vom lua în considerare că este necesar să reexamineze toate contactele. Din punct de vedere practic, un parcurs maximal ale tuturor contactelor este stabilit.

Calculul încălcării medii fiind mai mare, este necesar să se adopte următoarea abordare: vom trece prin toate contactele de N ori și apoi vom calcula încălcarea medie. Dacă se depășește o anumită toleranță fixată, atunci procesul este repornit. Atâta timp cât $\hat{t}_{med} > \text{toleranța}$, atunci \Rightarrow parcursul N în lista de timp a contactelor α pentru fiecare contact α și se poate determina (U^α, R^α) , iar legea de variație se verifică.

Obiectivele acestor două metode fiind aceleași, abordarea lor rămâne diferită. Prin urmare, trebuie să luăm în considerare o comparație în ceea ce privește precizia, timpul de calcul.

7. CONCLUZII

Metoda de rezoluție prezentată face posibilă tratarea unei probleme de interacțiune între corpurile rigide sau deformabile prin intermediul unei scheme implicite. Această caracteristică importantă face posibilă utilizarea pașilor de timp mai mari decât cu o abordare de tip "Molecular Dynamic", în schimb numărul operațiilor care trebuie efectuate este mult mai mare (rezoluție iterativă, construcție a operatorului de trecere).

Metoda „NDC” are avantajul de a fi stabilă, schema de integrare implicită, iar soluția locală *Gauss - Seidel* este robustă. Este necesar să se evalueze influența parametrilor de calcul: mărimea treptei de timp, standardul de convergență etc.

Prin repetarea schemei de principiu a metodelor elementului discret, putem rezuma etapele descrise.

Nu am specificat calculele de matrice de masă și matrice de inerție, care sunt ușor de determinat în cazul bidimensional și care vor face obiectul unui studiu tridimensional. Elementele discutate în această lucrare au furnizat elemente pentru modelarea interacțiunii și metoda de rezoluție, aceste alegeri fiind valabile în cadrul bidimensional și tridimensional.

BIBLIOGRAFIE

- [1] **A. Curnier**, “*Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collection*”, Presses Polytechniques et Universitaires Romanes, Lausanne, 1992.
- [2] **M. Jean**, „*The non smooth contact dynamics method. Computer Methods*” in Applied Mechanic and Engineering, 177(Special issue):235–257, 1999.
- [3] **J.J. Moreau**, „*Une formulation du contact à frottement sec ; application au calcul numérique*” Comptes Rendus Académies des Sciences, Paris, Série II, 302:799–801, 1986.
- [4] **J.J. Moreau**, „*Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*” In J.J. MOREAU et P.D. PANAGIOTOPOULOS, éditeurs : Nonsmooth Mechanics and Applications, chapitre CISM Courses and Lectures, vol. 302, pages 1–82. Springer-Verlag, 1988.
- [5] **I. Sebeșan**, „*Dinamica Vehiculelor Feroviare*”, Editura MatrixRom, București 2011.
- [6] **A. Neacșa, N.N. Antonescu, D.B. Stoica**, “*Software Applications for Complex Technological Systems Reliability*”, Journal of the Balkan Tribological, Volume: 15, Issue: 1, (2009).
- [7] **A. Neacșa, D.B. Stoica, N.N. Antonescu**, „*Behaviour of Sintered Carbide Pins Under Simulated Work Conditions*”, Experimental Study. In Journal of the Balkan Tribological Association Volume: 18 Issue: 4 Pages: 559-565 Published: 2012.
- [8] **B. Cambou, M. JEAN**, „*Micromécanique des matériaux granulaires*” Hermes Sciences, 2001.
- [9] **P. Alart A. Curnier**, „*A generalized newton method for contact problems with friction*”, Journal de mécanique théorique et appliquée, (1 à 7):67–82, 1988.
- [10] **M. Renouf**, „*Optimisation numérique et calcul parallèle pour l'étude des milieux divisés*”, Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, 2004.
- [11] **M. Renouf, P. Alart**, „*Solveurs parallèles pour la simulation de systèmes multicontacts*”, In Actes du sixième colloque national en calcul des structures, numéro TOME III, 2003.
- [12] **M. Renouf, P. Alart**, „*Un nouvel algorithme de quasi-optimisation pour la résolution des problèmes multicontacts et application aux milieux granulaires*”, In Proc. 16 ième Congrès français de mécanique, septembre 2003.
- [13] **M. Renouf, P. Alart**, „*Solveurs parallèles pour la simulation de systèmes multicontacts*”, Revue européenne des éléments finis, 2004. soumis.