

## ANALIZA DINAMICĂ A PODURILOR DIN GRINZI DE BETON ARMAT - DETERMINAREA MODURILOR PROPRII DE VIBRAȚIE

### DYNAMIC ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE BRIDGES - MODAL CALCULUS (EIGENVALUES, EIGENFREQUENCIES)

Nicușor DRĂGAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania  
Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET  
e-mail: ndragan@ugal.ro

**Rezumat:** *Lucrarea abordează comportarea unui pod realizat din grinzi de beton armat la acțiuni dinamice externe provenite din traficul rutier sau/și mișcări seismice. Astfel, se prezintă modelul rigidului cu șase grade de libertate cu legături vâscoelastice triortogonale ce schematizează aparatele de reazem din neopren. Sunt prezentate două studii de caz ale unor grinzi de beton armat, punându-se în evidență influența coeficienților de elasticitate asupra formei modurilor proprii de vibrații.*

**Cuvinte cheie:** *solid/rigid cu 6 grade de libertate, moduri proprii, vibrații decuplate*

**Abstract:** *The paper presents the dynamic analysis of a bridge made of reinforced concrete beams perturbed by external dynamic actions from road traffic and / or seismic movements. A 6DOF solid/body with triorthogonal viscoelastic bearings schematizing the neoprene support devices is analyzed. Two case studies of 6DOF rigid-body with neoprene supports and structural symmetries are presented; these model a bridge structure of reinforced concrete beams, pointing the influence of stiffness on vibration modes (eigenvalues, eigenfrequencies).*

**Keywords:** *6DOF solid-body, eigenvalues, eigenfrequencies, decoupled vibration*

#### 1. INTRODUCERE. MODELAREA SOLIDULUI RIGID 6DOF

Modelul fizic elaborat are la bază ipotezele definitorii ale solidului rigid cu șase grade de libertate dinamică cu legături elastice triortogonale cu umăr finit de reazeme elastice discrete. Caracteristicile inerțiale și elastice sunt reprezentate prin parametri măsurabili în funcție de structura și configurația sistemului. Ecuațiile diferențiale de mișcare ale vibrațiilor liniare pentru solidul rigid cu legături vâsco-elastice sunt cuplate elastic și vâscos. Sub formă matricială acest sistem se scrie [1]:

$$\overline{A}\ddot{\overline{q}} + \overline{B}\dot{\overline{q}} + \overline{C}\overline{q} = \overline{F} ,$$

unde  $\overline{A}$  este matricea de inerție (mase, momente statice, momente de inerție)

$\overline{B}$  - matricea de disipare vâscoasă (de amortizare)

$\underline{C}$  - matricea de rigiditate (a elasticităților)

$\underline{q} / \underline{\dot{q}} / \underline{\ddot{q}}$  - vectorii coordonatelor/vitezelor/acelerațiilor generalizate

$\underline{f}$  - vectorul forțelor generalizate

Deoarece sistemul (1) este dificil de rezolvat analitic sau folosind formalismul matricial, se ține seama de anumite anumite condiții geometrice și structurale pentru solidul rigid ca sistem vibrant, care să ducă la decuplarea sistemului de ecuații în subsisteme mai simple și ușor de integrat. În plus, se poate considera că legăturile rigidului sunt elastice sau cu amortizări mici, ecuațiile de mișcare simplificându-se prin anularea amortizărilor. În această ipoteză, sistemul ecuațiilor diferențiale de mișcare sub acțiunea unor perturbații exterioare se simplifică devenind:

$$\underline{A}\underline{\ddot{q}} + \underline{C}\underline{\dot{q}} = \underline{f} \quad (2)$$

Pentru determinarea modurilor proprii de vibrație se consideră solidul rigid neperturbat; în formalism matricial ecuația diferențială de mișcare (cu coeficienți matriciali) este de forma:

$$\underline{A}\underline{\ddot{q}} + \underline{C}\underline{\dot{q}} = \underline{0} \quad (3)$$

Dacă se consideră un sistem de axe central și principal, matricea de inerție devine diagonală, sistemul de ecuații diferențiale de mișcare ramânând cuplat elastic dar se decuplează inerțial. În acest caz, matricea de inerție este diagonală [2]:

$$\underline{A} = \text{DIAG}[m, m, m, J_x, J_y, J_z], \quad (4)$$

unde  $m$  este masa rigidului iar  $J_x$ ,  $J_y$  și  $J_z$  sunt momentele de inerție principale.

## 2. ANALIZA DINAMICĂ A RIGIDULUI 6 DOF CU SIMETRII STRUCTURALE

Rigidul este simetric în raport cu distribuția masică, configurația geometrică și dispunerea reazemelor elastice triortogonale. Se consideră că solidul rigid are o axă verticală de simetrie structurală, geometrică și a legăturilor elastice (rezeme neoprenice).

Considerând că rigidul are  $n$  legături triortogonale elastice în punctele  $M_i(x_i, y_i, z_i)$   $i = \overline{1, n}$  de constante elastice  $(k_{ix}, k_{iy}, k_{iz})$ , matricea de rigiditate devine [3], [4]:

Analiza dinamică a podurilor din grinzi de beton armat - determinarea modurilor proprii de vibrație

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \sum k_{ix} & 0 & 0 & 0 & \sum k_{ix}z_i & 0 \\ 0 & \sum k_{iy} & 0 & -\sum k_{iy}z_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum k_{iz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sum k_{iy}z_i & 0 & \sum (k_{iy}z_i^2 + k_{iz}y_i^2) & 0 & 0 \\ \sum k_{ix}z_i & 0 & 0 & 0 & \sum (k_{iz}x_i^2 + k_{ix}z_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum (k_{ix}y_i^2 + k_{iy}x_i^2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Sistemul de axe este central și principal, iar ecuațiile diferențiale de mișcare sunt cuplate numai elastic prin intermediul coeficienților  $c_{15} \equiv c_{51}$  și  $c_{24} \equiv c_{42}$  din matricea (5). În acest caz, sistemul de ecuații diferențiale ce descriu vibrațiile libere este de forma:

$$\begin{cases} m\ddot{X} + X \sum k_{ix} + \varphi_y \sum k_{ix}z_i = 0 \\ m\ddot{Y} + Y \sum k_{iy} - \varphi_x \sum k_{iy}z_i = 0 \\ m\ddot{Z} + Z \sum k_{iz} = 0 \\ J_x \ddot{\varphi}_x - Y \sum k_{iy}z_i + \varphi_x \sum (k_{iy}z_i^2 + k_{iz}y_i^2) = 0 \\ J_y \ddot{\varphi}_y + X \sum k_{ix}z_i + \varphi_y \sum (k_{iz}x_i^2 + k_{ix}z_i^2) = 0 \\ J_z \ddot{\varphi}_z + \varphi_z \sum (k_{ix}y_i^2 + k_{iy}x_i^2) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Din analiza termenilor de cuplaj din sistemul de ecuații diferențiale (6), se poate constata o decuplare a mișcărilor libere ale rigidului în următoarele subsisteme (de mișcări cuplate) [5], [6]:

**a)** subsistemul  $(X, \varphi_y)$  - alunecarea laterală cuplată cu mișcarea de ruluu

$$\begin{cases} m\ddot{X} + X \sum k_{ix} + \varphi_y \sum k_{ix}z_i = 0 \\ J_y \ddot{\varphi}_y + X \sum k_{ix}z_i + \varphi_y \sum (k_{iz}x_i^2 + k_{ix}z_i^2) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

**b)** subsistemul  $(Y, \varphi_x)$  - mișcarea de avans axial cuplată cu mișcarea de tangaj

$$\begin{cases} m\ddot{Y} + Y \sum k_{iy} - \varphi_x \sum k_{iy}z_i = 0 \\ J_x \ddot{\varphi}_x - Y \sum k_{iy}z_i + \varphi_x \sum (k_{iy}z_i^2 + k_{iz}y_i^2) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

**c)** subsistemul  $(Z)$  - mișcarea de săltare

$$m\ddot{Z} + Z \sum k_{iz} = 0 \quad (9)$$

**d)** subsistemul  $(\varphi_z)$  - mișcarea de întoarcere (girație)

$$J_z \ddot{\varphi}_z + \varphi_z \sum (k_{ix}y_i^2 + k_{iy}x_i^2) = 0 \quad (10)$$

### 3. STUDIU DE CAZ - MODURILE PROPRII DE VIBRAȚIE ALE UNUI POD RUTIER REALIZAT DIN GRINZI DE BETON ARMAT

#### 3.1.Pod realizat din 20 grinzi din beton armat

Se consideră modelul simplificat din figura 1 pentru viaductul modelat ca un rigid și realizat din 20 de grinzi din beton armat, rezemate individual pe câte 4 reazeme identice din neopren. Cele 20 de grinzi sunt grupate pe 4 rânduri (axa Cx) a câte 5 (axa Cy), solidarizarea acestora realizându-se constructiv prin intermediul unei suprabetonări.

Caracteristicile inerțiale și dimensionale ale viaductului și cele de elasticitate pentru aparatele de reazem din neopren sunt următoarele:

■Dimensiuni:  $2b = 200m$      $2a = 13,2m$      $2h = 3m$

■Poziționare aparate de reazem ([m] în sistemul de axe Cxyz) – conf. tabel 1.

Tabelul 1

Poziționarea aparatelor de reazem din neopren

REAZEME																			
i	X <sub>i</sub>	Y <sub>i</sub>	Z <sub>i</sub>	i	X <sub>i</sub>	Y <sub>i</sub>	Z <sub>i</sub>	i	X <sub>i</sub>	Y <sub>i</sub>	Z <sub>i</sub>	i	X <sub>i</sub>	Y <sub>i</sub>	Z <sub>i</sub>	i	X <sub>i</sub>	Y <sub>i</sub>	Z <sub>i</sub>
1	-5,6	-98	-1,5	17	-5,6	-58	-1,5	33	-5,6	-18	-1,5	49	-5,6	22	-1,5	65	-5,6	62	-1,5
2	-4,3	-98	-1,5	18	-4,3	-58	-1,5	34	-4,3	-18	-1,5	50	-4,3	22	-1,5	66	-4,3	62	-1,5
3	-2,3	-98	-1,5	19	-2,3	-58	-1,5	35	-2,3	-18	-1,5	51	-2,3	22	-1,5	67	-2,3	62	-1,5
4	-1	-98	-1,5	20	-1	-58	-1,5	36	-1	-18	-1,5	52	-1	22	-1,5	68	-1	62	-1,5
5	1	-98	-1,5	21	1	-58	-1,5	37	1	-18	-1,5	53	1	22	-1,5	69	1	62	-1,5
6	2,3	-98	-1,5	22	2,3	-58	-1,5	38	2,3	-18	-1,5	54	2,3	22	-1,5	70	2,3	62	-1,5
7	4,3	-98	-1,5	23	4,3	-58	-1,5	39	4,3	-18	-1,5	55	4,3	22	-1,5	71	4,3	62	-1,5
8	5,6	-98	-1,5	24	5,6	-58	-1,5	40	5,6	-18	-1,5	56	5,6	22	-1,5	72	5,6	62	-1,5
9	-5,6	-62	-1,5	25	-5,6	-22	-1,5	41	-5,6	18	-1,5	57	-5,6	58	-1,5	73	-5,6	98	-1,5
10	-4,3	-62	-1,5	26	-4,3	-22	-1,5	42	-4,3	18	-1,5	58	-4,3	58	-1,5	74	-4,3	98	-1,5
11	-2,3	-62	-1,5	27	-2,3	-22	-1,5	43	-2,3	18	-1,5	59	-2,3	58	-1,5	75	-2,3	98	-1,5
12	-1	-62	-1,5	28	-1	-22	-1,5	44	-1	18	-1,5	60	-1	58	-1,5	76	-1	98	-1,5
13	1	-62	-1,5	29	1	-22	-1,5	45	1	18	-1,5	61	1	58	-1,5	77	1	98	-1,5
14	2,3	-62	-1,5	30	2,3	-22	-1,5	46	2,3	18	-1,5	62	2,3	58	-1,5	78	2,3	98	-1,5
15	4,3	-62	-1,5	31	4,3	-22	-1,5	47	4,3	18	-1,5	63	4,3	58	-1,5	79	4,3	98	-1,5
16	5,6	-62	-1,5	32	5,6	-22	-1,5	48	5,6	18	-1,5	64	5,6	58	-1,5	80	5,6	98	-1,5

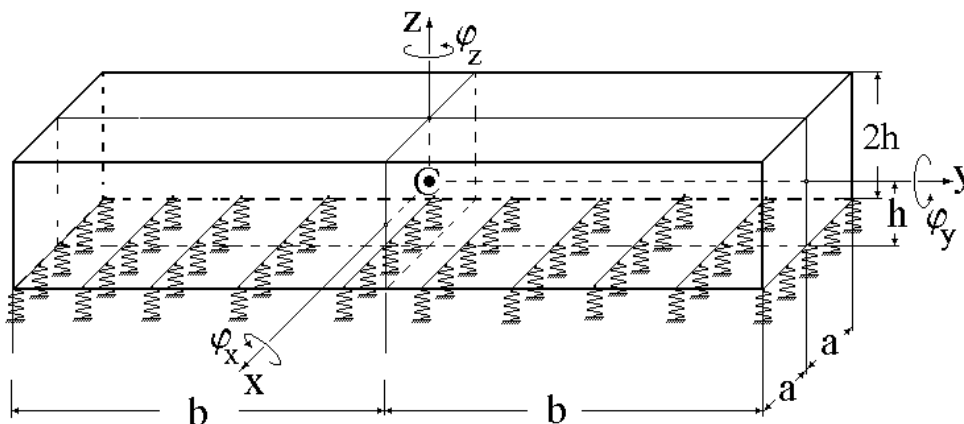


Fig. 1 Modelul simplificat al viaductului cu 20 de grinzi din beton armat

Analiza dinamică a podurilor din grinzi de beton armat - determinarea modurilor proprii de vibrație

■Caracteristici inerțiale:

$$m = 4 \times 10^6 \text{ kg} \quad J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$$

$$J_x = \frac{4 \times 10^6}{12} (200^2 + 3^2) = 13,3363 \times 10^9 \text{ kgm}^2$$

$$J_y = \frac{4 \times 10^6}{12} (13,2^2 + 3^2) = 61,080 \times 10^6 \text{ kgm}^2$$

$$J_z = \frac{4 \times 10^6}{12} (13,2^2 + 200^2) = 13,3914 \times 10^9 \text{ kgm}^2$$

■Elasticități:

$$k_{ix} \equiv k_x = 3,15 \times 10^6 \text{ N/m} \quad i = \overline{1,80}$$

$$k_{iy} \equiv k_y = 3,15 \times 10^6 \text{ N/m} \quad i = \overline{1,80}$$

$$k_{iz} \equiv k_z = 650 \times 10^6 \text{ N/m} \quad i = \overline{1,80}$$

Pulsațiile și frecvențele proprii ale vibrațiilor necuplate (6DOF) sunt date în tabelul 2.

Tabelul 2

**Pulsațiile și frecvențele proprii ale vibrațiilor necuplate (după cele șase “direcții”)**

Direcție	X	Y	Z	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$
$p$ [rad/s]	7,94	7,94	114,02	117,22	109,35	8,16
$f$ [Hz]	1,26	1,26	18,15	18,66	17,40	1,30

Expresiile numerice ale sistemelor de ecuații diferențiale scrise în deplasări ale vibrațiilor libere pentru subsistemele decuplate și matricile dinamice corespunzătoare sunt după cum urmează:

●pentru subsistemul  $(X, \varphi_y)$

$$\text{-ecuațiile diferențiale de mișcare} \quad \begin{cases} 4\ddot{X} + 252X - 378\varphi_y = 0 \quad [MN] \\ 61,08\ddot{\varphi}_y - 378X + 730387\varphi_y = 0 \quad [MNm] \end{cases}$$

$$\text{sau} \quad \begin{cases} \ddot{X} + 63X - 94,5\varphi_y = 0 \quad [m/s^2] \\ \ddot{\varphi}_y - 6,1886X + 11957,875\varphi_y = 0 \quad [rad/s^2] \end{cases}$$

$$\text{-matricea dinamică} \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} 63 & -94,5 \\ -6,1886 & 11957,875 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s^{-2} & ms^{-2} \\ m^{-1}s^{-2} & s^{-2} \end{bmatrix}$$

●pentru subsistemul  $(Y, \varphi_x)$

$$\begin{aligned} \text{-ecuațiile diferențiale de mișcare} & \begin{cases} 4\ddot{Y} + 252Y + 378\varphi_x = 0 \quad [MN] \\ 13336,3\ddot{\varphi}_x + 378Y + 183242000\varphi_x = 0 \quad [MNm] \end{cases} \\ \text{sau} & \begin{cases} \ddot{Y} + 63Y + 94,5\varphi_x = 0 \quad [m/s^2] \\ \ddot{\varphi}_x + 0,028344Y + 13740,093\varphi_x = 0 \quad [rad/s^2] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{-matricea dinamică} \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} 63 & 94,5 \\ 0,028344 & 13740,093 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s^{-2} & ms^{-2} \\ m^{-1}s^{-2} & s^{-2} \end{bmatrix}$$

●mișcarea decuplată de săltare

$$\text{-ecuația de mișcare} \quad 4\ddot{Z} + 52000Z = 0 \quad [MN] \quad \text{sau} \quad \ddot{Z} + 13000Z = 0 \quad [m/s^2]$$

●mișcarea decuplată de girație

$$\text{-ecuația de mișcare} \quad 13391,4\ddot{\varphi}_z + 891585\varphi_z = 0 \quad [MNm] \quad \text{sau} \quad \ddot{\varphi}_z + 66,5789\varphi_z = 0 \quad [rad/s^2]$$

În tabelul 3 sunt trecute valorile pulsațiilor și frecvențelor proprii ale subsistemelor decuplate, precum și valorile coeficienților de distribuție  $\mu_i \quad i = \overline{1,4}$ .

Tabelul 3

**Pulsațiile și frecvențele proprii ale subsistemelor cu mișcări decuplate**

Subsistem	Pulsație	Frecvența	Coefficienți de distribuție
$(X, \varphi_y)$	$p_1 = 7,94rad/s$	$f_1 = 1,26Hz$	$\mu_1 = -0,0005rad/m$
	$p_2 = 109,35rad/s$	$f_2 = 17,40Hz$	$\mu_2 = -125,867rad/m$
$(Y, \varphi_x)$	$p_3 = 7,94rad/s$	$f_3 = 1,26Hz$	$\mu_3 = 0,0005rad/m$
	$p_4 = 117,22rad/s$	$f_4 = 18,22Hz$	$\mu_4 = 144,736rad/m$
$(Z)$	$p_5 = p_Z = 114,02rad/s$	$f_5 = f_Z = 18,15Hz$	-
$(\varphi_z)$	$p_6 = p_{\varphi_z} = 8,16rad/s$	$f_6 = f_{\varphi_z} = 1,30Hz$	-

**3.2. Tronson de viaduct realizat din 4 grinzi din beton armat (între două pile)**

Se consideră modelul simplificat din figura 2 pentru un tronson al podului rutier situat între două pile ale acestuia (în total, podul este alcătuit din cinci astfel de tronsoane, fiecare tronson fiind realizat din patru grinzi identice dispuse longitudinal și solidarizate prin intermediul unei suprabetonări).

Analiza dinamică a podurilor din grinzi de beton armat - determinarea modurilor proprii de vibrație

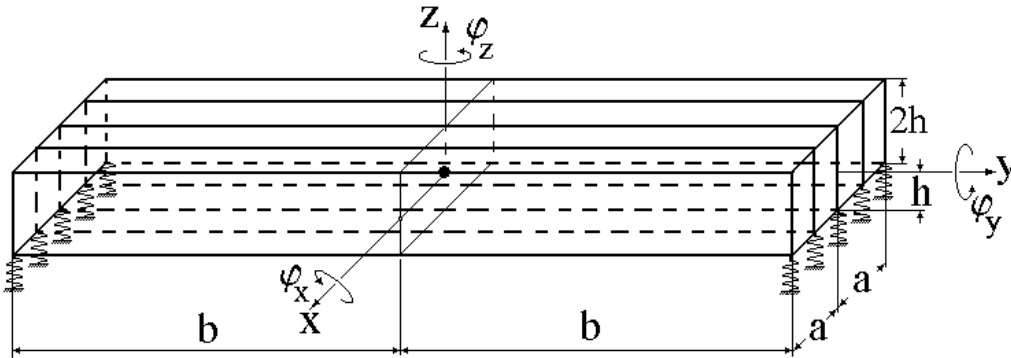


Fig. 2 Modelul simplificat al tronsonului de pod (4 de grinzi din beton armat)

Tabelul 4

Poziționarea aparatelor de reazem din neopren

REAZEME															
i	x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>	z <sub>i</sub>	i	x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>	z <sub>i</sub>	i	x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>	z <sub>i</sub>	i	x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>	z <sub>i</sub>
1	-5,6	-18	-1,5	5	1	-18	-1,5	9	-5,6	18	-1,5	13	1	18	-1,5
2	-4,3	-18	-1,5	6	2,3	-18	-1,5	10	-4,3	18	-1,5	14	2,3	18	-1,5
3	-2,3	-18	-1,5	7	4,3	-18	-1,5	11	-2,3	18	-1,5	15	4,3	18	-1,5
4	-1	-18	-1,5	8	5,6	-18	-1,5	12	-1	18	-1,5	16	5,6	18	-1,5

Fiecare grindă este rezemată pe patru aparate de reazem identice din neopren, pozițiile acestor reazeme fiind date de coordonatele în sistemul Cxyz trecute în tabelul 4.

Expresiile numerice ale sistemelor de ecuații diferențiale scrise în deplasări ale vibrațiilor libere pentru subsistemele decuplate și matricile dinamice corespunzătoare sunt după cum urmează:

•pentru subsistemul  $(X, \varphi_y)$

$$\text{-ecuațiile diferențiale de mișcare} \quad \begin{cases} 0,8\ddot{X} + 50,4X - 75,6\varphi_y = 0 \quad [MN] \\ 12,216\ddot{\varphi}_y - 75,6X + 146077\varphi_y = 0 \quad [MNm] \end{cases}$$

$$\text{sau} \quad \begin{cases} \ddot{X} + 63X - 94,5\varphi_y = 0 \quad [m/s^2] \\ \ddot{\varphi}_y - 6,1886X + 11957,842\varphi_y = 0 \quad [rad/s^2] \end{cases}$$

$$\text{-matricea dinamică} \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} 63 & -94,5 \\ -6,1886 & 11957,842 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s^{-2} & ms^{-2} \\ m^{-1}s^{-2} & s^{-2} \end{bmatrix}$$

●pentru subsistemul  $(Y, \varphi_x)$

-ecuațiile diferențiale de mișcare  $\begin{cases} 0,8\ddot{Y} + 50,4Y + 75,6\varphi_x = 0 \text{ [MN]} \\ 107,266\ddot{\varphi}_x + 75,6Y + 3369710\varphi_x = 0 \text{ [MNm]} \end{cases}$

sau  $\begin{cases} \ddot{Y} + 63Y + 94,5\varphi_x = 0 \text{ [m/s}^2\text{]} \\ \ddot{\varphi}_x + 0,70479Y + 31414,521\varphi_x = 0 \text{ [rad/s}^2\text{]} \end{cases}$

-matricea dinamică  $\underline{D} = \begin{bmatrix} 63 & 94,5 \\ 0,70479 & 31414,521 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-2} & ms^{-2} \\ m^{-1}s^{-2} & s^{-2} \end{bmatrix}$

●mișcarea decuplată de săltare

-ecuația de mișcare  $0,8\ddot{Z} + 10400Z = 0 \text{ [MN]}$  sau  $\ddot{Z} + 13000Z = 0 \text{ [m/s}^2\text{]}$

●mișcarea decuplată de girație

-ecuația de mișcare  $118,282\ddot{\varphi}_z + 17036,964\varphi_z = 0 \text{ [MNm]}$   
sau  $\ddot{\varphi}_z + 144,0368\varphi_z = 0 \text{ [rad/s}^2\text{]}$

În tabelul 5 sunt trecute valorile determinate cu relațiile de calcul din §2 pentru pulsațiile și frecvențele proprii ale subsistemelor decuplate, precum și valorile coeficienților de distribuție  $\mu_i \quad i = \overline{1,4}$ .

Tabelul 5

**Pulsațiile și frecvențele proprii ale subsistemelor cu mișcări decuplate**

Subsistem	Pulsație	Frecvență	Coeficienți de distribuție
$(X, \varphi_y)$	$p_1 = 7,94 \text{ rad/s}$	$f_1 = 1,26 \text{ Hz}$	$\mu_1 = -0,0005 \text{ rad/m}$
	$p_2 = 109,35 \text{ rad/s}$	$f_2 = 17,40 \text{ Hz}$	$\mu_2 = -125,867 \text{ rad/m}$
$(Y, \varphi_x)$	$p_3 = 7,94 \text{ rad/s}$	$f_3 = 1,26 \text{ Hz}$	$\mu_3 = 0,0005 \text{ rad/m}$
	$p_4 = 177,24 \text{ rad/s}$	$f_4 = 28,21 \text{ Hz}$	$\mu_4 = 331,757 \text{ rad/m}$
$(Z)$	$p_5 = p_Z = 114,02 \text{ rad/s}$	$f_5 = f_Z = 18,15 \text{ Hz}$	-
$(\varphi_z)$	$p_6 = p_{\varphi_z} = 12,00 \text{ rad/s}$	$f_6 = f_{\varphi_z} = 1,91 \text{ Hz}$	-



## 5. CONCLUZII

◆modelarea unui solid rigid cu legături elastice sau vâsco-elastice cu diverse tipuri de simetrii conduce la obținerea unor sisteme de ecuații diferențiale de mișcare decuplate în subsisteme cu mai puțini coeficienți de cuplaj și, deci mai ușor de studiat analitic; în acest fel, pot fi puse în evidență influențele factorilor dimensionali, inerțiali, elastici (eventual și a celor de amortizare) asupra formelor modurilor proprii de vibrație;

◆dacă se poate modela solidul rigid cu simetrii astfel încât mișcările acestuia să se raporteze la un sistem de axe central și principal, atunci mișcările acestuia după cele șase “direcții” ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$ ) sunt cuplate numai prin intermediul coeficienților nediagonali ai matricii de rigiditate (eventual și prin intermediul amortizărilor dacă sunt semnificative);

◆pentru studiul de caz al celor două rigide considerate, se poate constata:

-“gruparea” a trei dintre frecvențele proprii în zona  $1\div 2,5$  Hz, celelalte trei frecvențe fiind mult mai mari decât primele trei și grupate în intervalul  $17\div 18,5$  Hz, în cazul viaductului construit din 20 de grinzi solidarizate;

-“gruparea” a trei dintre frecvențele proprii în zona  $1\div 2$  Hz, celelalte trei frecvențe fiind mult mai mari decât primele trei și grupate două dintre ele în intervalul  $17\div 18,5$  Hz, cea de-a treia fiind mult mai mare în cazul modului de viaduct dintre două pile (construit din 4 grinzi solidarizate);

◆această diferență mare între frecvențele proprii se poate explica prin diferența foarte mare dintre elasticitatea elementelor de rezemare pe verticală (efort de compresiune) față de elasticitățile în plan orizontal (solicitări de forfecare) – raportul constantelor de elasticitate este de circa  $1 : 206$ ;

◆obținerea unor valori sau foarte mari sau foarte mici ale coeficienților de distribuție conduce la concluzia că, în interiorul subsistemelor  $(X, \varphi_y)$  și  $(Y, \varphi_x)$ , mișcările sunt de fapt foarte slab cuplate; în mod real, se poate considera că mișcările acestor subsisteme sunt cvasi-decuplate (această decuplare putând fi observată și din valorile relativ foarte mici ale coeficienților de cuplaj  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  și  $\beta_2$ ).

**BIBLIOGRAFIE**

- [1] **P. Bratu**, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, București, 2000
- [2] **N. Drăgan**, *Contribuții la analiza și optimizarea procesului de transport prin vibrații - teză de doctorat*, Universitatea "Dunărea de Jos", Galați, 2002
- [1] **P. Bratu, N. Drăgan**, *L'analyse dynamique de l'interaction machine-structure sur la base du modèle équivalent de rigide aux liaisons visco-elastiques*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [2] **P. Bratu, N. Drăgan**, *L'analyse des mouvements désaccouplés appliquée au modèle de solide rigide aux liaisons élastiques*, Analele Universității "Dunărea de Jos" din Galați Fascicula XIV, 1997
- [4] **N. Drăgan**, *Vibrațiile decuplate ale rigidului rezemat elastic într-un plan al centrului său de greutate*, Buletinul celei de a XXII-a Conferințe Naționale de Mecanica Solidelor Tomul IV, Brașov, 1998
- [6] **R. Manolescu, G. Bașno, A. Potârniche, N. Drăgan**, *Analiza dinamică a solidului rigid cu simetrie structurale rezemat elastic. Studiu de caz – vibrațiile decuplate ale elementelor din beton armat*, Buletinul Sesiunii de Comunicări Științifice a Catedrei de Mecanică și Mecanisme "SIMEC 2010", Universitatea Tehnică de Construcții 26 martie 2010, Ed. MatrixRom, București, 2010