

ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMELOR 1DOF CU REAZEME ELASTOMERICE. MODELUL REOLOGIC MAXWELL

DYNAMIC ANALYSIS OF THE MECHANICAL SYSTEMS 1DOF WITH ELASTOMERIC BEARINGS. MAXWELL RHEOLOGICAL MODEL

Gianina Cornelia SPÂNU (ȘTEFAN)^{1,2}, Gigel Florin CĂPĂȚÂNĂ³

¹Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania

Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET

²Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Școala Doctorală de Inginerie

e-mail: spanugianina@yahoo.com

³Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Romania

Centrul de Cercetare Mecanica Mașinilor și Echipamentelor Tehnologice - MECMET

e-mail: gcapatana@ugal.ro

Rezumat: Articolul propune analiza parametrilor dinamici ai unui sistem mecanic elastic cu un grad de libertate cu element de rezemare modelat reologic Maxwell.

Cuvinte cheie: analiză dinamică, sistem mecanic elastic 1DOF, reazeme elastomerice, model Maxwell

Abstract: The paper proposes the analysis of the dynamic parameters of a mechanical elastic system 1DOF with a damping viscous-elastic Maxwell model.

Keywords: dynamic analysis, 1DOF mechanical elastic system, elastomeric bearings, Maxwell model

1. INTRODUCERE. MODELUL REOLOGIC MAXWELL

Modelul elastic Hooke, modelul vâscoelastic Voigt-Kelvin, modelul vâscoelastic Maxwell, modelul histeretic și modelul vâscoelastic ereditar Zener sunt modelele reologice utilizate pentru reprezentarea elementelor antivibratile din neopren [1]-[7], conform fig. 1: a)m. Maxwell, b)m. Voigt-Kelvin, c)m. Hooke-Maxwell (Zener), d)m. vâsco-elasto-plastic.

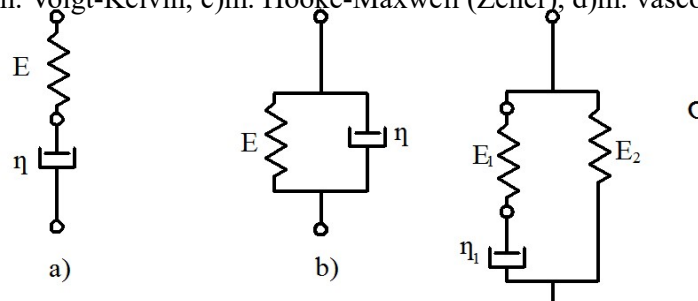


Fig. 1 Modele reologice complexe (M, V-K, Z, VEP)

Modelul reologic Maxwell poate simula comportamentul unui material care are un răspuns elastic urmat de o curgere vâscoasă constantă atunci când se aplică instantaneu, în momentul linițial t_0 , o forță F_0 care apoi rămâne constantă conform curbei caracteristice forță-deformație (fig. 2).

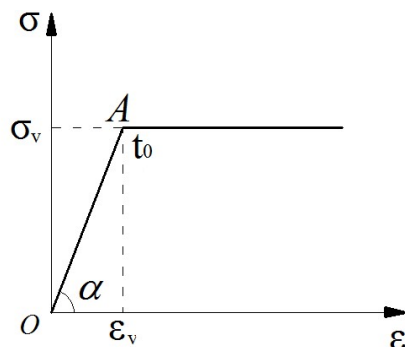


Fig. 2 Răspunsul dinamic al elementelor elastomerice - modelul Maxwell

Pentru o astfel de sarcină, arcul se deformează imediat ce se aplică sarcina. Amortizorul nu se deblochează instantaneu la aplicarea forței, dar este întins cu viteză constantă atâta timp cât este aplicată forța.

2. MODELUL MAXWELL. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE SISTEMULUI 1DOF

În figura 3 este prezentată schema de calcul a sistemului mecanic elastic 1DOF cu element masic și element de reazem de tip Maxwell [8], [9].

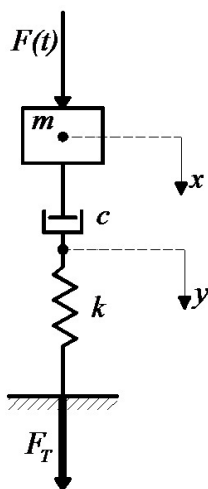


Fig. 3 Schema de calcul dinamic a sistemului 1DOF cu element elastomeric de tip Maxwell

Considerând x deplasarea pe verticală a masei m și y deplasarea punctului de legătură dintre elementul Newton și elementul Hooke, energia cinetică E , funcția de disipare D și variația de energie potențială V sunt:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (1)$$

$$D = \frac{1}{2} c (\dot{x} - \dot{y})^2 = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 - c \dot{x} \dot{y} + \frac{1}{2} c \dot{y}^2 \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{2} k y^2 \quad (3)$$

Considerând că sistemul mecanic este liniar și cu masă constantă iar forța perturbatoare este armonică $F(t) = F_0 \sin \omega t$, ecuațiile diferențiale de mișcare sunt [10]-[14]:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) = F_0 \sin \omega t \\ c(\dot{x} - \dot{y}) - ky = 0 \end{cases} \quad (4)$$

3. ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMULUI 1DOF CU ELEMENT DE AMORTIZARE DE TIP MAXWELL

Deoarece sistemul este liniar iar forța perturbatoare este armonică, în regim de vibrații forțate stabilizate parametrii cinematici și dinamici au o variație armonică (cu aceeași pulsație ω ca a forței perturbatoare), cu defazaje diferite (α , β) datorate elementului disipator [15], [16]

$$x_f(t) = A_f \sin(\omega t - \alpha) \quad (5)$$

$$y(t) = B \sin(\omega t - \beta) \quad (6)$$

$$F_T(t) = k \cdot y(t) = F_{0T} \sin(\omega t - \beta) , \quad (7)$$

unde: A_f este amplitudinea vibrației forțate a elementului masiv

B - amplitudinea oscilației armonice a punctului de legătură dintre elementul Newton și elementul Hooke

F_{0T} - amplitudinea forței transmise

În tabelul 1 este descris răspunsul dinamic în deplasare instantanee și gradul de izolare a vibrațiilor pentru modelul Maxwell cu masă, excitat din exterior cu o forță armonică. Au fost analizate două cazuri distincte de amortizare [17]-[20]:

1.amortizare liniar vâscoasă, descrisă de factorul de amortizare n sau de fracțiunea din amortizarea critică ζ :

$$\zeta = \frac{n}{p} = \frac{c}{2mp} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{c_{cr}} \quad (8)$$

2.amortizare structurală histeretică descrisă de coeficientul δ

$$\delta = \frac{c\omega}{k} = \frac{2n}{p} \cdot \frac{\omega}{p} = \frac{2n}{p} \Omega \quad (9)$$

Tabelul 1

Răspunsul dinamic în deplasare instantanee și gradul de izolare a vibrațiilor pentru modelul Maxwell cu masă, excitat din exterior cu o forță armonică

Cazuri de amortizare	Amortizare vâscoasă ζ	Amortizare histeretică δ
Ecuatiile de mișcare	$\begin{cases} m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) = F_0 \sin \omega t \\ c(\dot{x} - \dot{y}) - ky = 0 \end{cases}$	
Amplitudinea vibrației forțate	$A_f = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2 \Omega^2}{\Omega^4 + 4\zeta^2 \Omega^2 (1 - \Omega^2)^2}}$	$A_f = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{1 + \delta^2}{\Omega^4 + \delta^2 (1 - \Omega^2)^2}}$
Factorul de amplificare	$A(\Omega, \zeta) = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2 \Omega^2}{\Omega^4 + 4\zeta^2 \Omega^2 (1 - \Omega^2)^2}}$	$A(\Omega, \delta) = \sqrt{\frac{1 + \delta^2}{\Omega^4 + \delta^2 (1 - \Omega^2)^2}}$
Amplitudinea forței transmise	$F_{0T} = F_0 \frac{2\zeta\Omega}{\sqrt{\Omega^4 + 4\zeta^2 \Omega^2 (1 - \Omega^2)^2}}$	$F_{0T} = F_0 \frac{\delta}{\sqrt{\Omega^4 + \delta^2 (1 - \Omega^2)^2}}$
Transmisibilitatea	$T = \frac{2\zeta\Omega}{\sqrt{\Omega^4 + 4\zeta^2 \Omega^2 (1 - \Omega^2)^2}}$	$T = \frac{\delta}{\sqrt{\Omega^4 + \delta^2 (1 - \Omega^2)^2}}$

4. VARIAȚIA FACTORULUI DE AMPLIFICARE ȘI A TRANSMISIBILITĂȚII PENTRU MODELUL CU AMORTIZARE VÂSCOASĂ ζ

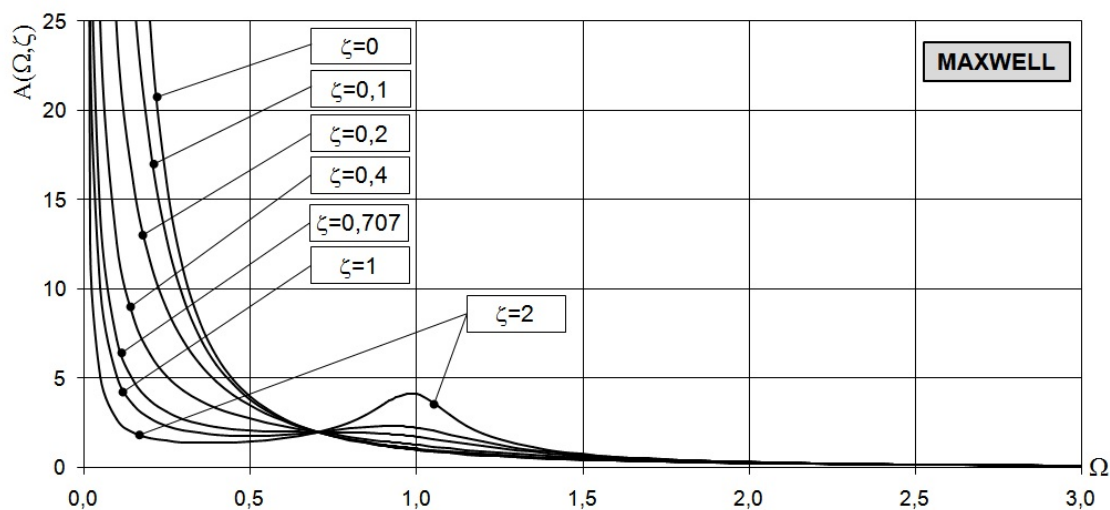


Fig. 4 Variația factorului de amplificare $A(\Omega, \zeta)$ în cazul amortizării vâskoase ζ

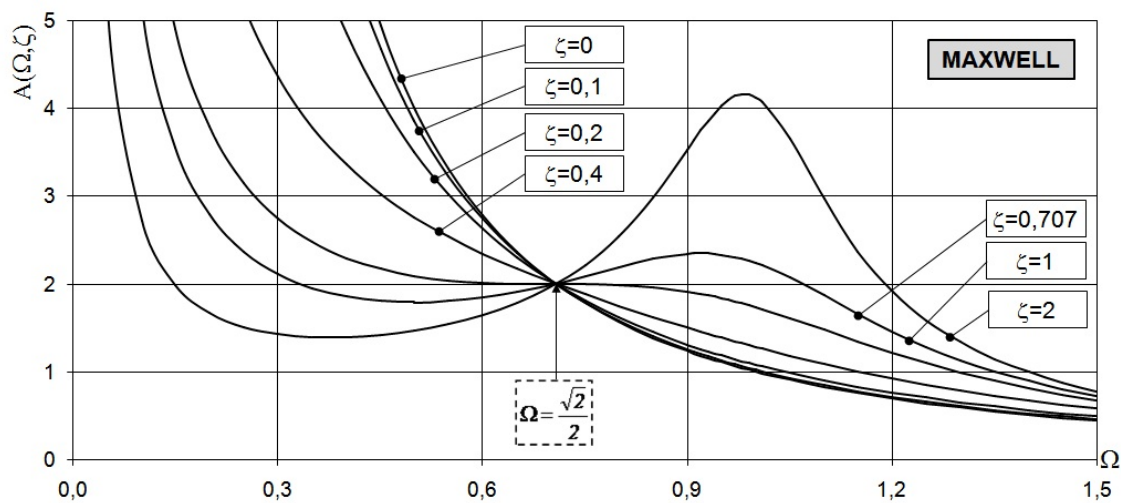


Fig. 5 Variația factorului de amplificare $A(\Omega, \zeta)$ în cazul amortizării vâskoase ζ (detaliu)

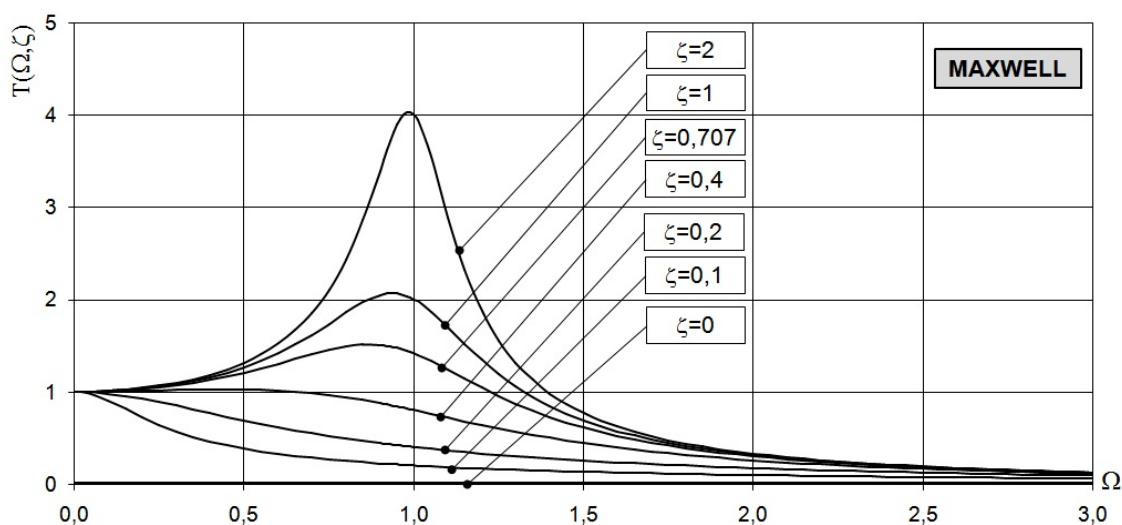


Fig. 6 Variația transmisibilității $T(\Omega, \zeta)$ în cazul amortizării vâskoase ζ

În figura 4 sunt reprezentate variațiile factorului de amplificare funcție de pulsația relativă Ω (considerată variabilă) pentru anumite valori ale fracțiunii din amortizarea critică ζ (cazul amortizării vâskoase). În figura 5 sunt prezentate variațiile factorului de amplificare în pentru valori ale pulsației relative $0 \leq \Omega \leq 1,5$; indiferent de mărimea amortizării vâskoase,

factorul de amplificare are aceeași valoare pentru $\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \zeta\right) = 2$.

În figura 6 sunt reprezentate variațiile transmisibilității funcție de pulsația relativă Ω (considerată variabilă) pentru aceleași valori ale fracțiunii din amortizarea critică ζ . Pentru valori mici ale amortizării vâskoase (și ale fracțiunii din amortizarea critică ζ), transmisibilitatea are valori mai mici, obținându-se astfel grade de izolare mai mari.

5. VARIAȚIA FACTORULUI DE AMPLIFICARE ȘI A TRANSMISIBILITĂȚII PENTRU MODELUL CU AMORTIZARE HISTERETICĂ δ

În figurile 7 și 8 sunt reprezentate variațiile factorului de amplificare funcție de pulsația relativă Ω (considerată variabilă) pentru anumite valori ale factorului de amortizare histeretică δ . Indiferent de mărimea amortizării histeretice (a factorului de amortizare δ),

pentru valoarea pulsației relative $\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \zeta\right) = 2$.

În figura 9 sunt reprezentate variațiile transmisibilității funcție de pulsația relativă Ω (considerată variabilă) pentru aceleași valori ale factorului de amortizare histeretică ζ .

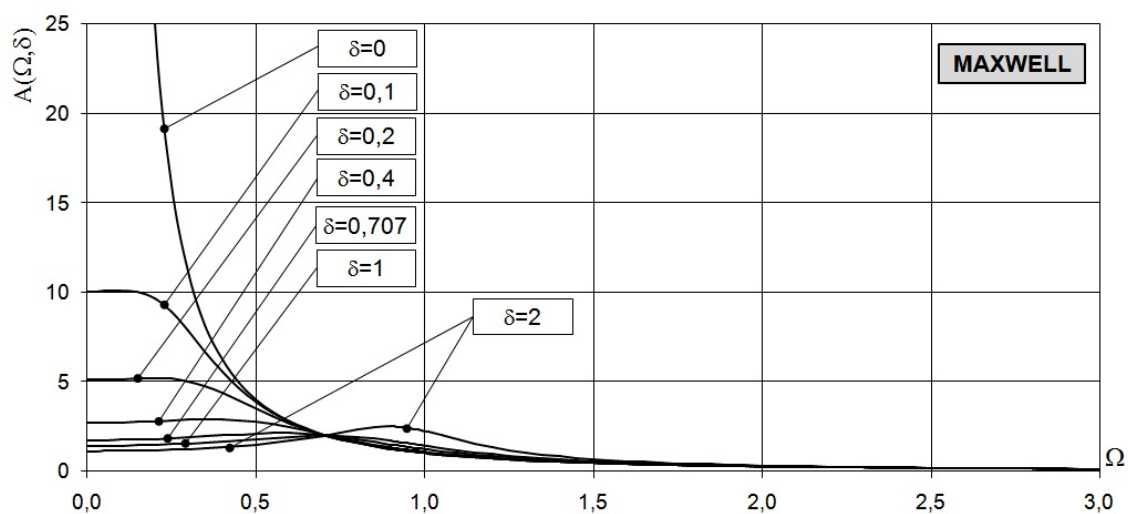


Fig. 7 Variația factorului de amplificare $A(\Omega, \delta)$ în cazul amortizării histeretice δ

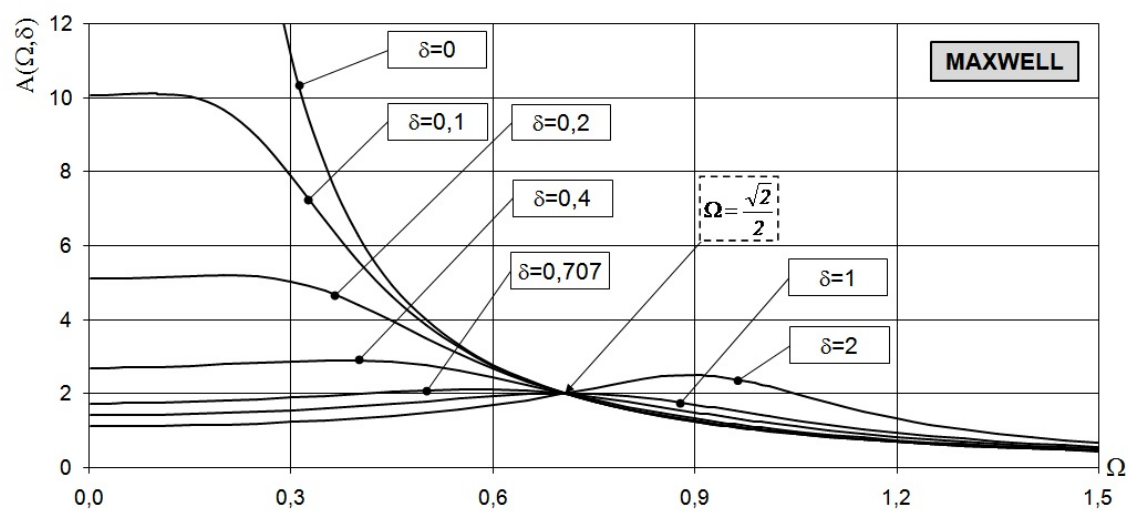


Fig. 8 Variația factorului de amplificare $A(\Omega, \delta)$ în cazul amortizării histeretice δ (detaliu)

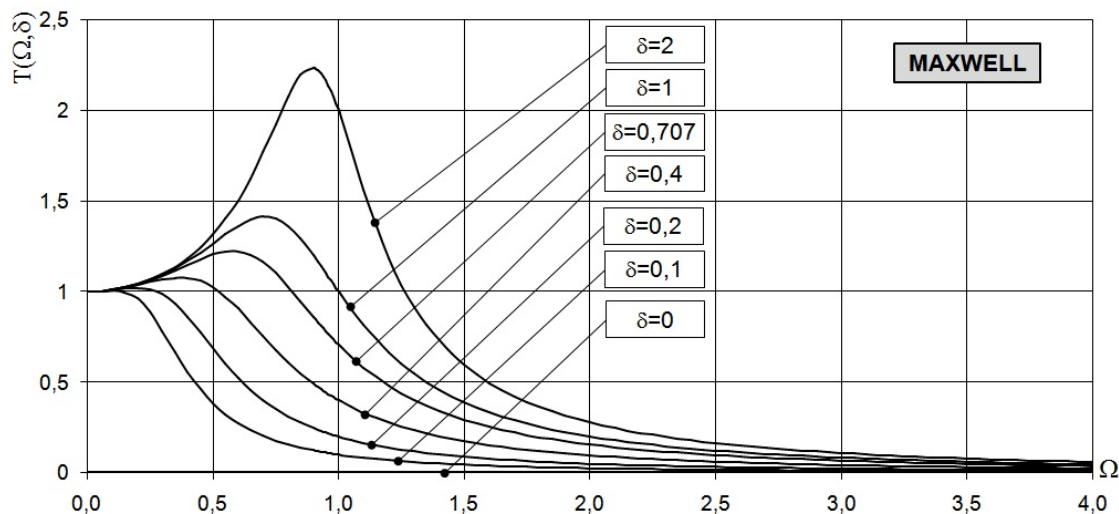


Fig. 9 Variația transmisibilității $T(\Omega, \zeta)$ în cazul amortizării histeretice δ

6. CONCLUZII

Analizând reprezentarea grafică a factorului de amplificare și a transmisibilității pentru sistemul cu **amortizare vâscoasă** (fig. 4, fig. 5, fig. 6) se observă că:

a) atunci când pulsația forței perturbatoare este redusă în comparație cu pulsația proprie a sistemului mecanic 1DOF ($\omega \ll p$), situație în care arcul este foarte rigid, în funcție de amortizarea din sistem amplitudinea vibrației forțate poate lua valori foarte mari (cu atât mai mari cu cât amortizarea este mai mare!); în acest caz, amplitudinea mișcării este impusă de rigiditatea arcului;

b) în situația în care pulsația forței perturbatoare este cu mult mai mare decât pulsația proprie a sistemului ($\omega \gg p$), ceea ce corespunde unui arc foarte moale sau unei forțe perturbatoare cu pulsație ridicată, amplitudinea vibrației forțate scade către zero, indiferent de mărimea amortizării;

c) pentru valori mici ale pulsației relative $\Omega \rightarrow 0$, transmisibilitatea $T \rightarrow 1$ indiferent de mărimea amortizării; întreaga forță aplicată sistemului 1DOF (în regim cvasistatic) se transmite direct bazei/fundației;

d) pentru valori mari ale pulsației relative $\omega \gg p$, transmisibilitatea $T \rightarrow 0$ indiferent de mărimea amortizării; cu cât amortizarea vâscoasă este mai mare (coeficient de amortizare c , factor de amortizare n , fracțiune din amortizarea critică ζ), cu atât forța transmisă este mai mare, indicele de izolare fiind mai redus.

Pentru cazul **amortizării histeretice**, cu reprezentările grafice din figurile 7 și 8 (factor de amplificare) și din figura 9 (transmisibilitate), se observă că:

e) atunci când pulsația forței perturbatoare este redusă în comparație cu pulsația proprie a sistemului mecanic 1DOF ($\omega \ll p$), amplitudinea mișcării este puternic influențată de amortizarea din sistem;

f) pentru valori mari ale pulsației relative ($\Omega \rightarrow \infty$), amplitudinea vibrației forțate a sistemului 1DOF scade către zero, indiferent de mărimea amortizării;

g) pentru valori mici ale pulsației relative $\Omega \rightarrow 0$, transmisibilitatea $T \rightarrow 1$ indiferent de mărimea amortizării;

h) pentru valori mari ale pulsației relative $\omega \gg p$, transmisibilitatea $T \rightarrow 0$ indiferent de mărimea amortizării; cu cât amortizarea este mai mare, cu atât forța transmisă este mai mare, indicele de izolare fiind mai redus.

BIBLIOGRAFIE

- [1] **G.C. Spânu (Ștefan), N. Drăgan**, *Analiza transmisibilității și a gradului de izolare a vibrațiilor la sistemele mecanice cu amortizare structurală. Modelul Zener*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 8 (2017) nr. 4, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2017
- [2] **N. Dragan**, *Dynamic analysis of the parameters of the mechanical systems with structural damping. Viscoelastic SLS model. Part 1: Amplitude factor*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2016
- [3] **N. Dragan**, *Dynamic analysis of the parameters of the mechanical systems with structural damping. Viscoelastic SLS model. Part 2: Transmissibility factor and isolation degree*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2016
- [4] **G.C. Spânu (Ștefan)**, *Analiza factorului de amplificare la sistemele mecanice cu amortizare structurală. Modelul Zener*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 9 (2018) nr. 1, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2018
- [5] **N. Drăgan**, *Analiza dinamică a sistemelor mecanice cu reazeme elastomerice. Modelul Voigt-Kelvin*, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Vol. 9 (2018) nr. 2, ISSN 2068-6331, Ed. MatrixRom, București, 2018
- [6] **N. Dragan**, *Rheological SLS model. Dynamic parameters of the systems with viscous damping. Part 1: Amplitude factor*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2017
- [7] **N. Dragan**, *Rheological SLS model. Dynamic parameters of the systems with viscous damping. Part 2: Transmissibility factor and isolation degree*, The Annals of “Dunarea de Jos” University of

Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering, ISSN 1224-5615, Galati, 2017

[9] **R.M. Christensen**, *Theory of Viscoelasticity*, Dover Publications Inc., New York, 2010

[10] **Gh. Ene, C. Pavel**, *Introducere în tehnica izolării vibrațiilor și a zgomotului*, Editura Matrix Rom, București, 2012

[11] **P. Bratu**, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, București, 2000

[12] **P. Bratu**, *Analiza structurilor elastice. Comportarea la acțiuni statice și dinamice*, Ed. Impuls, București, 2011

[13] **Gh. Buzdugan, L. Fetcu, M. Radeș**, *Vibrații mecanice*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982

[14] **P. Bratu**, *Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje*, Ed. Tehnică, București, 1990

[15] **N. Drăgan**, *Contribuții la analiza și optimizarea transportului prin vibrații - teza de doctorat*, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați, 2002

[16] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems Dynamics of the Rigid Body with Structural Symmetries. Modal Analysis. Transmitted Forces and Moments*, Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009

[17] **P. Bratu, N. Dragan**, *Theoretical and numerical considerations on the composite neoprene used at vibration and shock isolations isolators*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVI, ISSN 1224-5615, Galați, 2010

[18] **N. Dragan**, *Modal calculus of the reinforced concrete bridges modeled as a rigid solid beared on viscous elastic neoprene supports*, The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle XIV Mechanical Engineering Volume 2 Issue XVI, ISSN 1224-5615, Galați, 2010

[19] **N. Dragan**, *Considerations on the composite neoprene vibration isolators used for the mechanical systems bearings. The dynamics of the non-linear models*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering vol. XI (XXI) NR2, ISSN 1583-0691, 2012

[20] **N. Dragan**, *Studies on the Mechanical Elastic Systems with nonlinear damping. Power and amplitude numerical analysis*, Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION "ICAI'09", ISBN 978-960-474-064-2, ISSN 1790-5117, Prague, March 23-25 2009